

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

До середины XIX века большинство промышленных предприятий работали нескольких человек. С развитием компаний для их владельцев все более очевидной становилась мысль о сложности эффективного исполнения всех менеджерских функций одним человеком, что значит, необходимо формирования некоторым образом организованного аппарата управления.

Организация такого аппарата первоначально основывалась на эмпирическом подходе: успехи использования математических подходов и стиля мышления в естественных науках не сразу привели к мысли о том, чтобы включить в сферу математических приложений управление.

Однако уже ранние работы теоретиков организации управления (XVIII—XIX вв.) явились важным этапом разработки и становления научного менеджмента. Усилия Адама Смита, Фредерика Тейлора, Чарльза Бэббиджа (Charles Babbage), Генри Ганта (Henry Gantt) и др. помогли эффективно решить ряд конкретных задач в области организации труда и производства, учета человеческого фактора в промышленности.

В XIX столетии индустриальная революция повлекла уменьшение роли человека как ресурса исполнения физических работ. Исследование именно этой области привело к становлению индустриальной инженерии. Многие работы уже в то время посвящались автоматизации или механизации умственной деятельности и лишь намного позже — автоматизации генерации символов, передачи символов и логических манипуляций.

Математика предложила научные методы для изучения умственной работы, а также знания и понимание, необходимые для эффективного совместного использования персонала и машин.

В частности, это выразилось в разработке научных подходов к исполнению каждой из управленческих функций (статистический контроль качества, надежность и техническое обслуживание оборудования, маркетинговые

исследования, управление запасами и др.). Параллельно с декомпозицией менеджерских функций на управленческие подзадачи возникла необходимость интегрирования диверсифицированных функций и бизнеса в одно целое для повышения управляемости предприятия.

Исполнительские функции развивались одновременно с развитием организаций. Это сопровождалось увеличением требований к менеджерам. Как следствие управленцы были вынуждены обращаться за помощью к консультантам по управлению. Научный менеджмент сегодня — это фактически оказание помощи исполнителям рабочих заданий с использованием научного инструментария.

Активное использование достижений математики в различных областях, связанных с принятием управленческих решений, привело к становлению дисциплины, называемой «Исследования операций». Формальные истоки исследования операций связывают с инициативой Алекса Питера Роу (Alex Piter Rowe), суперинтенданта Bawdsey Research Station, который использовал в 1937 г. знания британских ученых для повышения эффективности работы персонала новейшей радарной станции.

Затем исследование операций получило развитие. Для управления воздушными операциями будущим нобелевским лауреатом 1948 г. в области физики Патриком Мейнардом Стюартом Блэкеттом (Patrick Maynard Stuart Blackett) была организована специальная команда — Antiaircraft Command Research Group, включавшая специалистов из различных областей знаний (физики, математики, астрофизики, военных операций, физиологии). В 1942г. такие операционные исследовательские группы были сформированы во всех трех британских военных департаментах: Сухопутном, Морском и Воздушном 1, 2.

В России же становление исследование операций, как отдельной области знаний, в развитии отставало. Это было вызвано и гонениями на кибернетику в целом, и общей технической отсталостью страны.

Формальное рождение исследования операций в России связывают с публикацией в 1955 г. статьи Китова А. И., Ляпунова А.А., Соболева С.Л. «Основные черты кибернетики» в журнале «Вопросы философии».

По фактам взрывное развитие исследования операций в России пришлось на конец 50-х и начало 60-х годов, когда страна стала реализовывать амбициозные планы в военной отрасли, сопровождаемые реформированием Вооруженных Сил, созданием РВСН и видовых военных НИИ.

Рост популярности исследования операций в те годы связан с такими именами, как Гермейера Ю.Б., Бусленко Н.П., Канторовича Л.В., Моисеева Н.Н., Репьева Ю.М. и многих других ученых и руководителей крупных проектов.

К процедурам принятия решений относят такие типы:

- анализ, где рассматривается идентификация проблемы и определение оценки;
- моделирование, оно состоит из постановки задачи, формирования модели, получения результатов и тестирование результата и модели;
- регулирование – определение воздействия, реализация воздействия.

Возрастающая сложность задач управления являлась причиной возникновения потребности в математических инструментах планирования и принятия решений и как следствие в использовании достижений исследования операций в области структуризации цикла принятия решений, количественных оценок альтернативных политик, планов и решений.

В настоящее время исследования операций оформились в отдельную прикладную отрасль знаний, сильно дифференцируемую по отраслям человеческой деятельности: философия и методология управления системами, программное управление, управление запасами, надежность и эксплуатация систем, управление очередями и запросами клиентов, координация процессов, процессы в сетях, теория игр и конкуренция, проблемы поиска решений, планирование и др.

Некоторые области исследования операций (управление запасами, производственный контроллинг, планирование) оформились в самостоятельные дисциплины.

Определения, приведенные ниже, дают основу для начального понимания природы исследования операций:

1. научный метод обеспечения исполнителя количественным инструментом для принятия решений относительно операций, которые он контролирует;

2. применение научных методов междисциплинарными командами как для задач, решаемых с помощью человеко-машинных систем, так и для получения решений, которые наилучшим образом соответствуют целям организации в целом;

3. научный подход к задачам, решаемым исполнителем;

4. оптимальное принятие решений в детерминированных и вероятностных системах реальной жизни и моделирование таких систем при решении задач, которые встречаются в политических, экономических, предпринимательских, инженерных и социальных науках и в основном связаны с размещением ограниченного ресурса;

5. ответвление прикладной математики, областью применения которой является процесс принятия решений.

Из определений можно сделать по крайней мере вывод о том, что исследование операций определяется либо как научный метод управления, либо как множество математических методов, либо как раздел математики. При этом ни одно из определений не принимается большинством специалистов-практиков, стоящих на страже интересов противоборствующих школ. Однако ясно, что исследование операций — это использование научного (как правило, математического) метода принятия решений (анализ, моделирование, регулирование).

Операция — это всякая система действий (мероприятие), объединенных единым замыслом и направленных к достижению какой-то цели. Это

управляемое мероприятие, то есть от нас зависит, каким способом выбрать некоторые параметры, характеризующие его организацию.

Каждый определенный выбор зависящих от нас параметров называется решением.

Целью исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Те параметры, совокупность которых образует решение, называются элементами решения. В качестве элементов решения могут быть различные числа, векторы, функции, физические признаки и т.д.

Таким образом можно сформулировать термин исследования операций – это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее оптимального управления организационными системами. Предметом - системы организационного управления или организации, которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой подразделений не всегда согласующихся между собой и могут быть противоположны.

В действительности не существует строгого порядка исполнения взаимодействующих процедур принятия решений, которое часто продолжается вплоть до окончания проекта. Основные типовые технологии исследования операций, а также типовые вопросы, на которые они помогают ответить количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями. Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всей организации называется оптимальным, а решение наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям будет субоптимальным.

В общем случае процесс постановки и решения задач оптимизации может быть представлен в форме взаимосвязанных этапов, на каждом из которых выполняются определенные действия.

Отдельными этапами процесса постановки и решения задач оптимизации являются:

~ Анализ проблемной ситуации.

- ~ Построение математической модели.
- ~ Анализ модели.
- ~ Выбор метода и средства решения.
- ~ Выполнение численных расчетов.
- ~ Анализ результатов расчетов.
- ~ Применение результатов расчетов.
- ~ Коррекция и доработка модели.

Главное назначение первого этапа – логическое осмысление конкретной проблемы. При этом выполняется анализ всех доступных ресурсов (материальных, финансовых, информационных и других), необходимых для построения модели, ее использования и реализации полученных результатов с целью решения имеющейся проблемы. На этом этапе также выполняется анализ требований, предъявляемых в той или иной форме к результату решения проблемы.

При рассмотрении процесса постановки и решения задач оптимизации ключевую роль играет понятие математической модели задач оптимизации и свойства ее основных элементов. Именно от свойств математической модели зависит возможность решения отдельной задачи оптимизации и выбор наиболее эффективного алгоритма и способа для этой цели. Игнорирование или незнание особенностей математических моделей задач оптимизации служат источником ошибок и неудач в решении данных задач.

В общем случае под математической моделью задачи оптимизации будем понимать специальную запись постановки и условий решения типовой задачи оптимизации с использованием понятий математики и математической символики. Применительно к конкретной задаче оптимизации математическая модель соответствует математической постановке данной задачи.

При постановке задачи оптимизации должны быть определены или специфицированы следующие ее базовые компоненты:

- ~ характеристика переменных, фиксированный набор значений которых характеризует отдельное решение задачи;
- ~ набор ограничивающих условий, исключающих из рассмотрения отдельные решения по причине их физической или логической невозможности;
- ~ оценочная функция, позволяющая количественно сравнить различные решения с целью выбора наилучшего из них.

Каждый из базовых компонент математической модели задачи оптимизации имеет свои особые свойства, которые зависят от свойств соответствующих математических объектов.

Понятие переменной является одним из фундаментальных в математике, характерным свойством которой служит множество принимаемых ею значений. В зависимости от специфических свойств этого множества в задачах оптимизации используются три основных типа переменных:

- ~ непрерывные, множество принимаемых значений которых, как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных вещественных чисел или является его подмножеством;
- ~ целочисленные или дискретные, множество принимаемых значений которых, как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных целых чисел или является его подмножеством;
- ~ булевы, множество принимаемых значений которых имеет всего лишь два значения: 0 и 1.

Большинство, если не все, практические задачи оптимизации имеют некоторый набор ограничивающих условий, которые исключают из рассмотрения отдельные решения по причине их физической или логической невозможности. Данные условия получили название ограничений, которые в своей совокупности определяют или специфицируют множество допустимых альтернатив рассматриваемой задачи оптимизации.

В общем случае ограничение представляет собой некоторую функциональную зависимость, которая связывает отдельные значения переменных друг с другом.

Целевой или критериальной функцией задачи оптимизации называется некоторая оценочная функция, предназначенная для количественного сравнения альтернатив с целью выбора наилучшей. Целевая функция определяется как некоторая математическая функция, функционал или оператор, что, в общем случае, записывается в виде: $f(x, y, z)$.

В зависимости от свойств функции $f(x, y, z)$ в задачах оптимизации используются следующие основные типы целевых функций.

- ~ Линеинные, в которых функция $f(x, y, z)$ является линейной относительно всех своих переменных.
- ~ Нелинейные, в которых функция $f(x, y, z)$ является нелинейной относительно всех своих переменных. В последнем случае дополнительно рассматривают:
 - ~ выпуклые (квадратичные), в которых функция $f(x, y, z)$ является выпуклой (соответственно, квадратичной) относительно своих переменных;
 - ~ невыпуклые, в которых функция $f(x, y, z)$ является невыпуклой относительно своих переменных.

В зависимости от количества целевых функций рассматриваются два основных типа задач оптимизации:

- ~ однокритериальная задача оптимизации, в математической модели которой присутствует единственная целевая функция;
- ~ многокритериальная задача оптимизации, в математической модели которой присутствует несколько целевых функций.

В контексте математической модели задачи оптимизации требование нахождения наилучшего решения конкретизируется в требование максимизации или минимизации целевой функции.

Рассмотренные свойства базовых компонентов математической модели задач оптимизации позволяют выполнить общую классификацию этих задач, знание которой необходимо для правильного анализа и выбора метода для решения конкретных задач оптимизации.

Для удобства общая классификация задач оптимизации представлена в табличном виде.

Таблица 1.

Характеристика переменных	Характеристика ограничений	Характеристика целевой функции	Класс задач оптимизации
1	2	3	4
Непрерывные	Линейные	Одна, линейная	Линейное программирование
Непрерывные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Одна, линейная	Целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Целочисленное нелинейное программирование
Булевы	Линейные	Одна, линейная	Булево программирование
Булевы	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Булево нелинейное программирование
Непрерывные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное линейное программирование
Непрерывные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное целочисленное нелинейное программирование
Булевы	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное булево

			программирование
Булевы	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное булево нелинейное программирование

При решении практических задач оптимизации в рамках конкретных проектов следует придерживаться некоторого шаблона, необходимого для понимания особенностей решаемой проблемы и выбора наиболее эффективных средств её решения. Общее описание задачи оптимизации должно включать в себя следующую информацию:

- ~ название задачи, позволяющее соотнести решаемую задачу с одним из известных классов задач оптимизации;
- ~ содержательная постановка задачи, которая в повествовательной форме или в форме сценария описывает сущность исходной проблемы, подлежащей решению;
- ~ математическая постановка задачи, которая представляет исходную проблему в форме математической модели. Дальнейший анализ данной модели служит основой для выбора средств её решения;
- ~ метод решения, который может быть использован для решения рассматриваемой задачи оптимизации применительно к разработанной математической модели;
- ~ алгоритм решения, который может быть использован для практического решения рассматриваемой задачи оптимизации применительно к конкретному набору исходных данных;
- ~ средство или программа решения, которые позволяют реализовать вычислительный процесс поиска оптимального решения применительно к разработанной математической модели и к конкретному набору исходных данных;
- ~ примеры численных расчетов, иллюстрирующих правильность выбранных методов, алгоритмов и средств решения исходной проблемы.

При рассмотрении особенностей решения отдельных задач оптимизации весьма удобно придерживаться данного шаблона, который позволяет достичь необходимого уровня систематизации при изучении столь широкой проблематики, какой на сегодня является область задач оптимизации.

ПРИНЦИПЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Некоторые задачи математического программирования обладают специфическими особенностями, которые позволяют свести их решение к рассмотрению некоторого множества более простых «подзадач». В результате вопрос о глобальной оптимизации некоторой функции сводится к поэтапной оптимизации некоторых промежуточных целевых функций. В динамическом программировании рассматриваются методы, позволяющие путем поэтапной (многошаговой) оптимизации получить общий (результатирующий) оптимум.

Обычно методами динамического программирования оптимизируют работу некоторых управляемых систем, эффект которой оценивается аддитивной, или мультипликативной, целевой функцией. Аддитивной называется такая функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которой вычисляется как сумма некоторых функций f_j , зависящих только от одной переменной x_j :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

Слагаемые аддитивной целевой функции соответствуют эффекту решений, принимаемых на отдельных этапах управляемого процесса. По аналогии, мультипликативная функция распадается на произведение положительных функций различных переменных:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcirc_{j=1}^n f_j(x_j)$$

Основные требования к задачам, выполнение которых позволяет применить динамическое программирование:

1. Объектом исследования должна служить управляемая система (объект) с заданными допустимыми состояниями и допустимыми управлениями.
2. Задача должна позволять интерпретацию как многошаговый процесс, каждый шаг которого состоит из принятия решения о выборе одного из допустимых управлений, приводящих к изменению состояния системы.
3. Задача не должна зависеть от количества шагов и быть определенной на каждом из них.
4. Состояние системы на каждом шаге должно описываться одинаковым (по составу) набором параметров.
5. Последующее состояние, в котором оказывается система после выбора решения на k -м шаге, зависит только от данного решения и исходного состояния к началу k -го шага. Данное свойство является основным с точки зрения идеологии динамического программирования и называется отсутствием последствия.

Рассмотрим вопросы применения модели динамического программирования в обобщенном виде. Пусть стоит задача управления некоторым абстрактным объектом, который может пребывать в различных состояниях. Текущее состояние объекта отождествляется с некоторым набором параметров, обозначаемым в дальнейшем X , именуемым вектором состояния. Предполагается, что задано множество всех возможных состояний. Для объекта определено также множество допустимых управлений (управляющих воздействий) U , которое, можно считать числовым множеством. Управляющие воздействия могут осуществляться в дискретные моменты времени $k = 1, 2, \dots, n$, причем управленческое решение заключается в выборе одного из управлений $u_k \in U$. Планом задачи или

стратегией управления называется вектор $\bar{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, компонентами которого служат управления, выбранные на каждом шаге процесса. Ввиду предполагаемого отсутствия последствий между каждыми двумя последовательными состояниями объекта x_k и x_{k+1} существует известная функциональная зависимость, включающая также выбранное управление: $x_{k+1} = j(x_k, u_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тем самым задание начального состояния объекта x_0 и выбор плана U однозначно определяют траекторию поведения объекта.

Эффективность управления на каждом шаге k зависит от текущего состояния x_k , выбранного управления u_k и количественно оценивается с помощью функций $f_k = f(x_k, u_k)$, являющихся слагаемыми аддитивной целевой функции, характеризующей общую эффективность управления объектом. Оптимальное управление, при заданном начальном состоянии x_0 , сводится к выбору такого оптимального плана U^* , при котором достигается максимум суммы значений f_k на соответствующей траектории.

Основной принцип динамического программирования заключается в том, что на каждом шаге следует стремиться не к изолированной оптимизации функции $f_k(x_k, u_k)$, а выбирать оптимальное управление u_k^* в предположении об оптимальности всех последующих шагов. Формально указанный принцип реализуется путем отыскания на каждом шаге k условных оптимальных управлений $u_k^*(x_k)$, обеспечивающих наибольшую суммарную эффективность, начиная с этого шага, в предположении, что текущим является состояние x_k .

Обозначим $F_k(x)$ максимальное значение суммы функций f_k на протяжении шагов от k до n (получаемое при оптимальном управлении на данном отрезке процесса), при условии, что объект в начале шага k находится в состоянии x . Тогда функции $F_k(x)$ должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$F_k(x) = \max_{u_k} \{f_k(x_k, u_k) + F_{k+1}(x_{k+1})\}, \quad k = 1 : (n-1),$$

где $x_{k+1} = j_k(x_k, u_k)$.

Данное соотношение называют основным рекуррентным соотношением динамического программирования. Оно реализует базовый принцип динамического программирования, известный также как принцип оптимальности Беллмана.

Оптимальная стратегия управления должна удовлетворять следующему условию: каково бы ни было начальное состояние x_k на k -м шаге и выбранное на этом шаге управление u_k , последующие управления (управленческие решения) должны быть оптимальными по отношению к состоянию $x_{k+1} = j_k(x_k, u_k)$, получающемуся в результате решения, принятого на шаге k .

Основное соотношение позволяет найти функции $F_k(x)$ только в сочетании с начальным условием, каковым в нашем случае является равенство

$$F_n(x_n) = \max_{u_n} \{ f_n(x_n, u_n) \}$$

Сравнение рекуррентной формулы с аналогичными соотношениями в рассмотренных выше примерах указывает на их внешнее различие. Это различие обусловлено тем, что в задаче распределения ресурсов фиксированным является конечное состояние управляемого процесса. Поэтому принцип Беллмана применяется не к последующим, а к начальным этапам управления, и начальное соотношение имеет вид

$$F_1(x_1) = \max_{x_1} \{ f_1(x_1, u_1) \}$$

Важно еще раз подчеркнуть, что сформулированный выше принцип оптимальности применим только для управления объектами, у которых выбор оптимального управления не зависит от предыстории управляемого процесса, т.е. от того, каким путем система пришла в текущее состояние. Именно это обстоятельство позволяет осуществить декомпозицию задачи и сделать возможным ее практическое решение.

В то же время, говоря о динамическом программировании как о методе решения оптимизационных задач, необходимо отметить и его слабые

стороны.

При наличии нескольких ограничений состояние управляемого объекта на каждом шаге характеризуется уже набором параметров $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$, и табулировать значения функций $F_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ необходимо для многократно большего количества точек. Последнее обстоятельство делает применение метода динамического программирования явно нерациональным или даже просто невозможным. Данную проблему его основоположник Р. Беллман эффектно назвал «проклятием многомерности». В настоящее время разработаны определенные пути преодоления указанных трудностей.

Экономический процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. В экономических процессах управление заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Например, выпуск продукции любым предприятием – управляемый процесс, так как он определяется изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, величиной финансирования и т.д. Совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т.д., является управлением. Таким образом, экономический процесс выпуска продукции можно считать состоящим из нескольких этапов (шагов), на каждом из которых осуществляется влияние на его развитие.

Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения (о величине капитальных вложений, о замене оборудования определенного вида и т.д.). Под этапом обычно понимают хозяйственный год.

На практике встречаются такие задачи планирования, в которых заметную роль играют случайные факторы, влияющие как на состояние системы, так и на выигрыш. Существует разница между детерминированной и стохастической задачами динамического программирования. В

детерминированной задаче оптимальное управление является единственным и указывается заранее как жесткая программа действий. В стохастической задаче оптимальное управление является случайным и выбирается в ходе самого процесса в зависимости от случайно сложившейся ситуации. В детерминированной схеме, проходя процесс по этапам от конца к началу, тоже находится на каждом этапе целый ряд условных оптимальных управлений, но из всех этих управлений, в конечном счете, осуществлялось только одно. В стохастической схеме это не так. Каждое из условных оптимальных управлений может оказаться фактически осуществленным, если предшествующий ход случайного процесса приведет систему в соответствующее состояние.

Принцип оптимальности является основой поэтапного решения задач динамического программирования. Типичными представителями экономических задач динамического программирования являются так называемые задачи производства и хранения, задачи распределения капиталовложений, задачи календарного производственного планирования и другие. Задачи динамического программирования применяются в планировании деятельности предприятия с учетом изменения потребности в продукции во времени. В оптимальном распределении ресурсов между предприятиями в направлении или во времени.

Описание характеристик динамического программирования и типов задач, которые могут быть сформулированы в его рамках, по необходимости должно быть общим и несколько неопределенным, так как существует необозримое множество различных задач, укладывающихся в схему динамического программирования. Только изучение большого числа примеров дает отчетливое понимание структуры динамического программирования.

Идея решения задач динамического программирования основана на том, что среди шагов, на которых приходится принимать решение, есть один – последний, когда не требуется многовариантных расчетов. Нужно только

учесть выгоду, которую можно получить именно на этом этапе. Если бы нам каким-либо образом удалось оптимально распределить средства между отраслями для первых четырех лет, то спланировать их размещение для пятого года не составляло бы труда. Мы должны были бы разделить остатки средств между двумя отраслями так, чтобы прибыль, полученная в последнем году, была максимальной.

Идея динамического программирования и состоит в том, что процесс планирования начинается с последнего шага (года). Рассматриваются все возможные ситуации (остаток средств), возможные в результате выполнения предпоследнего шага и для каждой ситуации выбирается «условно» наилучший вариант последнего шага. Оптимально спланировав последний шаг, отступаем к предыдущему и тоже оцениваем его с тех же позиций. Таким образом, процесс динамического программирования разворачивается в обратном порядке – от последнего шага к первому, от конца планового периода к его началу. Выигрыш здесь достигается за счет того, что вместо решения сложной глобальной проблемы, раз за разом решаются несравнимо более простые задачи последовательной «условной» оптимизации одного шага.

Есть еще одна особенность, отличающая его от линейного программирования. Тот и другой метод получили свое название не случайно. Напомним, что сфера использования линейного программирования предполагает линейность функция цели и ограничений. То есть предполагается пропорциональная зависимость между величинами: например, что два трактора сделают вдвое больше работы, чем один, а в двух килограммах сена содержится в два раза больше питательных веществ, чем в одном, и т.д. Во многих случаях такое допущение вполне приемлемо, но далеко не всегда. Так, двойная доза удобрения может не только не дать двойной прибавки урожая, но и нанести вред растениям в почве; увеличение в два раза средств на развитие производства зачастую не способно привести к двойному увеличению прибыли и т.д. Когда предположение о

пропорциональности результата исходным действиям явно несправедливо, обращаться к линейному программированию неправомерно. Что же касается динамического программирования, то оно применимо и для решения многих «нелинейных» задач.

Основные виды задач, решаемые с помощью динамического программирования

Динамическое программирование, используя поэтапное планирование, позволяет не только упростить решение задачи, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения количества исследуемых вариантов, так как вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение относительно простых задач.

Планируя поэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т.е. при принятии решения на отдельном этапе всегда необходимо иметь в виду конечную цель. Однако динамическое программирование имеет и свои недостатки. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого метода не существует.

Каждая задача имеет свои трудности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток динамического программирования заключается также в трудоемкости решения многомерных задач. При очень большом числе переменных решение задачи даже на современных ЭВМ ограничивается памятью и быстродействием машины. Например, если для исследования каждой переменной одномерной задачи требуется 10 шагов, то в двумерной задаче их количество увеличивается до 100, в трехмерной до 1000 и т.д.

Вот как звучит принцип оптимальности Беллмана.

Принцип оптимальности: какое бы не было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

Отсюда следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n -м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т.д., вплоть до первого шага.

Основные виды задач, решаемые с помощью динамического программирования:

1. Задача управление запасами.
2. Задача распределение ресурсов.
3. Задача о найме работников.
4. Задача оптимальной политики замены оборудования и др.

Решение каждой представляет собой разный алгоритм, но один принцип решения. При использовании алгоритмов динамического программирования, если задано начальное состояние управляемой системы, то задача решается в обратном направлении, а если конечное, то – в прямом. Наконец, если заданы как начальное, так и конечное состояния, то задача существенно усложняется. (В качестве компромисса в этом случае можно отказаться от оптимизации на первом или последнем этапе.)

Каждая задача преследует определенную цель: максимизация прибыли, минимизация расхода топлива, оптимальное распределение, но все подчиняются одному принципу – разделение на отдельные этапы.

Любую многошаговую задачу можно решать по-разному: либо искать сразу все элементы решения на всех шагах, либо же строить оптимальное управление шаг за шагом, на каждом этапе расчета оптимизируя только один шаг. Обычно второй способ оптимизации оказывается проще, чем первый, особенно при большом числе шагов.

Такая идея постепенной, пошаговой оптимизации и лежит в основе

метода динамического программирования. Оптимизация одного шага, как правило, проще оптимизации всего процесса: лучше, оказывается, много раз решить сравнительно простую задачу, чем один раз – сложную.

С первого взгляда идея может показаться довольно тривиальной. В самом деле, что казалось бы, проще: если трудно оптимизировать операцию в целом, разбить ее на ряд шагов. Каждый такой шаг будет отдельной, маленькой операцией, оптимизировать которую уже нетрудно. Надо выбрать на этом шаге такое управление, чтобы эффективность этого шага была максимальна.

Планируя многошаговую операцию, надо выбирать управление на каждом шаге с учетом всех его будущих последствий на еще предстоящих шагах. Управление на i -м шаге выбирается не так, чтобы выигрыш именно на данном шаге был максимален, а так, чтобы была максимальна сумма выигрышей на всех оставшихся до конца шагах плюс данный.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов есть один, который может планироваться попросту, без оглядки на будущее. Этот шаг, единственный из всех, можно планировать так, чтобы он сам, как таковой, принес наибольшую выгоду.

Поэтому процесс динамического программирования обычно разворачивается от конца к началу: прежде всего планируется последний шаг. Планируя последний шаг, нужно сделать разные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из этих предположений найти условное оптимальное управление на последнем шаге («условное» потому, что оно выбирается исходя из условия, что предпоследний шаг кончился так-то и так-то).

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс «проходится» дважды: первый раз – от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления и условные оптимальные выигрыши за оставшийся «хвост» процесса; второй раз – от начала к концу, когда нам

остается только «прочитать» уже готовые рекомендации и найти безусловное оптимальное управление u^* , состоящее из оптимальных шаговых управлений.

Первый этап условной оптимизации несравненно сложнее и более длительный второго. Второй этап почти не требует дополнительных вычислений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Распределение объема строительно-монтажных работ на объекте по кварталам планового года составляет: 2 млн. руб. на первый квартал, 5 млн. руб. на второй, 3 млн. руб. на третий и 1 млн. руб. на четвертый. Подрядная организация планирует, какие производственные мощности должны быть на объекте. Работа ведется в две смены, но при необходимости может быть организована и третья смена. Если понадобится уменьшить производственные мощности на объекте, то затраты по их переброске на другие объекты составят 70 тыс. рублей на каждый млн. руб. выполняемого объема работ. Если потребуется ввести новые производственные мощности, то затраты на это составят 100 тыс. руб. по каждому млн. руб. выполняемого объема работ. Если на объекте будут находиться неиспользуемые производственные мощности, то на каждый млн. руб. объема потери будут составлять 80 тыс. рублей. При нехватке мощностей и организации дополнительной третьей смены будут дополнительно расходоваться 110 тыс. рублей. Перед началом планового периода на объекте имеется столько производственных мощностей, сколько нужно для выполнения работ объемом 2 млн. рублей.

Найти оптимальное распределение производственных мощностей по кварталам планового года.

1-й этап. Описание системы.

Обозначим производственные мощности, имеющиеся в начале i -го квартала ($i=1,2,3,4$). За единицу примем производственные мощности для выполнения работ в один млн. рублей. Обозначим через m_i требуемое количество производственных мощностей для выполнения заданного в i -том квартале объема работ $m_1=2, m_2=5, m_3=3, m_4=1$. Состояние системы S_i , таким образом, определяется величиной x_i . Управление u_i состоит, во-первых, в переброске производственных мощностей с рассматриваемого объекта на какие-либо другие или, наоборот, с каких-либо объектов на рассматриваемый объект, во-вторых, в организации дополнительной третьей смены при нехватке мощностей. Затраты при оптимальном управлении должны быть минимальными. Естественным временным шагом процесса управления является квартал планового года.

2-ой этап. Определение функций эффекта для i -го шага.

В зависимости от применяемого управления, т.е. изменения производственных мощностей x_i на объекте, либо дополнительного использования имеющихся мощностей за счет организации третьей смены затраты определяются различным образом.

При изменении (переброске мощностей) функцию затрат по условиям задачи можно записать следующим образом:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 100(x_i - x_{i-1}), & \text{при } x_i \neq x_{i-1}, \text{ т.е. введение новых мощностей,} \\ 70(x_i - x_{i-1}), & \text{при } x_i \neq x_{i-1}, \text{ т.е. снятие лишних мощностей;} \end{cases}$$

а при неизменном x_i (сохранении уровня мощности):

$$j_i(x_i) = \begin{cases} 80(x_i - m_i), & \text{при } x_i \neq m_i, \text{ т.е. при прстое мощностей,} \\ 110(m_i - x_i), & \text{при } x_i \neq m_i, \text{ т.е. при организации третьей смены.} \end{cases}$$

Общая функция затрат имеет вид:

$$F_i(x_i) = f_i(x_i) + j_i(x_i).$$

3-ий этап. Определение функции изменения состояния системы (производственных мощностей) на i -м шаге.

В конце i -го шага производственные мощности должны быть равны мощностям в начале $(i+1)$ -го шага. Поэтому функцию изменения системы на $(i+1)$ -м шаге запишем:

$$S_i^* = x_i^* + x_{i+1}^*.$$

4-й этап. Запись основного рекуррентного соотношения динамического программирования.

Оно имеет вид:

$$F_i(x_i) = \min_{x_i} \{ f_i(x_i) + j_i(x_i) + F_{i+1}(x_{i+1}) \}.$$

Здесь $F_i(x_i)$ и $F_{i+1}(x_{i+1})$ - условные оптимальные затраты соответственно на i -ом и $(i+1)$ -м шагах.

5-ый этап. Определение условных оптимальных затрат на последнем четвертом шаге:

$$F_4(x_4) = \min_{x_4} \{ f_4(x_4) + j_4(x_4) \}.$$

В этой формуле:

$$f_4(x_4) = \begin{cases} 100(x_4 - x_3), & \text{при } x_4 \leq x_3, \\ 70(x_3 - x_4), & \text{при } x_4 \geq x_3, \end{cases}$$

А при неизменном x_i (сохранении уровня мощности):

$$j_4(x_4) = \begin{cases} 80(x_4 - 1), & \text{при } x_4 \leq 1, \\ 110(1 - x_4), & \text{при } x_4 \geq 1, \end{cases}$$

где x_3 и x_4 - производственные мощности в третьем и четвертом кварталах.

Можно предположить, что производственные мощности в третьем квартале отсутствуют или составляют 1,2,3,4,5 единиц.

Рассчитываем условные минимальные затраты для каждого предположения, изменяя величину мощности в четвертом квартале (т.е. осуществляя различные управления).

При $x_3 = 0$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4(x_4) = 0 + 110(1 - 0) = 110 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4(x_4) = 100(1 - 0) + 0 = 100 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4(x_4) = 100(2 - 0) + 80(2 - 1) = 280 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 100(3 - 0) + 80(3 - 1) = 460 \text{ тыс. руб.}
\end{aligned}$$

Далее, очевидно, что $F_4(x_4)$ будет расти, поэтому нет смысла продолжать расчеты. Наименьшие затраты составляют 100 тыс. рублей.

При $x_3 = 1$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4 = 70(1 - 0) + 110(1 - 0) = 180 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4 = 0 + 0 = 0, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4 = 100(2 - 1) + 80(2 - 1) = 180 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 100(3 - 1) + 80(3 - 1) = 360 \text{ тыс. руб. и т. д.}
\end{aligned}$$

При $x_3 = 2$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(2 - 0) + 110(1 - 0) = 250 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(2 - 1) + 0 = 70 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4(x_4) = 0 + 80(2 - 1) = 80 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 100(3 - 2) + 80(3 - 1) = 260 \text{ тыс. руб. и т. д.}
\end{aligned}$$

При $x_3 = 3$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(3 - 0) + 110(1 - 0) = 320 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(3 - 1) + 0 = 140 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(3 - 2) + 80(2 - 1) = 150 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 0 + 80(3 - 1) = 160 \text{ тыс. руб. и т. д.}
\end{aligned}$$

При $x_3 = 4$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(4 - 0) + 110(1 - 0) = 390 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(4 - 1) + 0 = 210 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(4 - 2) + 80(2 - 1) = 220 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(4 - 3) + 80(3 - 1) = 230 \text{ тыс. руб. и т. д.}
\end{aligned}$$

При $x_3 = 5$

$$\begin{aligned}
x_4 = 0 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(5 - 0) + 110(1 - 0) = 460 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 1 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(5 - 1) + 0 = 280 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 2 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(5 - 2) + 80(2 - 1) = 290 \text{ тыс. руб.}, \\
x_4 = 3 & \Rightarrow F_4(x_4) = 70(5 - 3) + 80(3 - 1) = 300 \text{ тыс. руб. и т. д.}
\end{aligned}$$

Отберем все минимальные (условно-оптимальные) значения затрат в

четвертом квартале и соответствующие им величины производственных мощностей (управлений) в таблицу.

Таблица 2.

Производственные мощности в 3-м квартале	Минимальные затраты 4-го квартала	Условно-оптимальные производственные мощности (управления)
x_3	$F_4(x_4)$	x_4
0	100	1
1	0	1
2	70	1
3	140	1
4	210	1
5	280	1

6-ой этап. Определение условно-оптимальных затрат, а также соответствующих им управлений на третьем, втором и первом шагах процесса.

Для третьего квартала (предпоследний шаг процесса) рекуррентное соотношение имеет вид:

$$F_3(x_3) = \min_{x_3} \{ f_3(x_3) + j_3(x_3) + F_4(x_4) \},$$

где

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 100(x_3 - x_2), & \text{при } x_3 \leq x_2, \\ 70(x_2 - x_3), & \text{при } x_3 > x_2, \end{cases}$$

и

$$j_3(x_3) = \begin{cases} 80(x_3 - 3), & \text{при } x_3 \leq 3, \\ 110(3 - x_3), & \text{при } x_3 > 3. \end{cases}$$

Предположим, что производственные мощности во втором квартале могут иметь уровень от 0 до 5 единиц. Рассчитываем затраты при этих предположениях. Значения $F_4(x_4)$ будем брать из Таблицы 1.

При $x_2 = 0$

$$x_3 = 0 \Rightarrow F_3(x_3) = 0 + 110(3 - 0) + 100 = 430 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow F_3(x_3) = 100(1 - 0) + 110(3 - 1) + 0 = 320 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 100(2 - 0) + 110(3 - 2) + 70 = 380 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_2 = 1$

$$x_3 = 0 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(1 - 0) + 110(3 - 0) + 100 = 500 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow F_3(x_3) = 0 + 110(3 - 1) + 0 = 220 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 100(2 - 1) + 110(3 - 2) + 70 = 280 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_2 = 2$

$$x_3 = 0 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(2 - 0) + 110(3 - 0) + 100 = 670 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(2 - 1) + 110(3 - 1) + 0 = 290 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 0 + 110(3 - 2) + 70 = 180 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow F_3(x_3) = 100(3 - 2) + 0 + 140 = 240 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_2 = 3$

$$x_3 = 0 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(3 - 0) + 110(3 - 0) + 100 = 640 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(3 - 1) + 110(3 - 1) + 0 = 360 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(3 - 2) + 110(3 - 2) + 70 = 250 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow F_3(x_3) = 0 + 0 + 140 = 140 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow F_3(x_3) = 100(4 - 3) + 80(4 - 3) + 210 = 390 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

Далее, учитывая, что начинать с $x_3 = 0$ нет смысла, продолжим расчеты.

При $x_2 = 4$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(4 - 2) + 110(3 - 2) + 70 = 320 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(4 - 3) + 0 + 140 = 210 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow F_3(x_3) = 0 + 80(4 - 3) + 210 = 290 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_2 = 5$

$$x_3 = 2 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(5 - 2) + 110(3 - 2) + 70 = 390 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(5 - 3) + 0 + 140 = 280 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow F_3(x_3) = 70(5 - 4) + 80(4 - 3) + 210 = 380 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

Отберем все минимальные (условно-оптимальные) значения затрат в третьем квартале и соответствующие им величины производственных мощностей (управлений) в 3-м и 4-м кварталах в таблицу.

Таблица 3.

Производственные мощности во 2-м квартале	Минимальные затраты 3-го квартала	Условно-оптимальные мощности в 3-м квартале	Условно-оптимальные мощности в 4-м квартале
x_2	$F_3(x_3)$	x_3	x_4
0	320	1	1
1	220	1	1
2	180	2	1
3	140	3	1
4	210	3	1
5	280	3	1

Второй квартал (предпоследний процесс),

$$F_2(x_2) = \min_{x_2} [f_2(x_2) + j_2(x_2) + F_3(x_3)],$$

где

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 100(x_2 - x_1), & \text{при } x_2 \geq x_1, \\ 70(x_1 - x_2), & \text{при } x_2 < x_1, \end{cases}$$

и

$$j_2(x_2) = \begin{cases} 80(x_2 - 5), & \text{при } x_2 \geq 5, \\ 110(5 - x_2), & \text{при } x_2 < 5. \end{cases}$$

При $x_1 = 0$

$$x_2 = 0 \Rightarrow F_2(x_2) = 0 + 110(5 - 0) + 320 = 870 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(1 - 0) + 110(5 - 1) + 220 = 760 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(2 - 0) + 110(5 - 2) + 180 = 710 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(3 - 0) + 110(5 - 3) + 140 = 660 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(4 - 0) + 110(5 - 4) + 210 = 720 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_1 = 1$

$$x_2 = 2 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(2 - 1) + 110(5 - 2) + 180 = 610 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(3 - 1) + 110(5 - 3) + 140 = 560 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(4 - 1) + 110(5 - 4) + 210 = 620 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_1 = 2$

$$x_2 = 2 \Rightarrow F_2(x_2) = 0 + 110(5 - 2) + 180 = 510 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(3 - 2) + 110(5 - 3) + 140 = 460 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(4 - 3) + 110(5 - 4) + 210 = 520 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_1 = 3$

$$x_2 = 2 \Rightarrow F_2(x_2) = 70(3 - 2) + 110(5 - 2) + 180 = 580 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 0 + 110(5 - 3) + 140 = 360 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(4 - 3) + 110(5 - 4) + 210 = 420 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_1 = 4$

$$x_2 = 2 \Rightarrow F_2(x_2) = 70(4 - 2) + 110(5 - 2) + 180 = 650 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 70(4 - 3) + 110(5 - 3) + 140 = 430 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 0 + 110(5 - 4) + 210 = 320 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 5 \Rightarrow F_2(x_2) = 100(5 - 4) + 0 + 280 = 380 \text{ тыс. руб. и т. д.}$$

При $x_1 = 5$

$$x_2 = 3 \Rightarrow F_2(x_2) = 70(5 - 3) + 110(5 - 3) + 140 = 500 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow F_2(x_2) = 70(5 - 4) + 110(5 - 4) + 210 = 390 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_2 = 5 \Rightarrow F_2(x_2) = 0 + 0 + 280 = 280 \text{ тыс. руб.}$$

Отберем все минимальные (условно-оптимальные) значения затрат во втором квартале и соответствующие им величины производственных мощностей (управлений) во 2-м, в 3-м и 4-м кварталах в таблицу.

Таблица 4.

Производственные мощности в 1-м квартале	Минимальные затраты в 1-м квартале	Усл.-опт. мощности во 2-м квартале	Усл.-опт. мощности в 3-м квартале	Усл.-опт. мощности в 4-м квартале
x_1	$F_2(x_2)$	x_2	x_3	x_4
0	660	3	3	1
1	560	3	3	1
2	460	3	3	1
3	360	3	3	1
4	320	4	3	1

5	280	5	3	1
---	-----	---	---	---

Для первого квартала:

$$F_1(x_1) = \min_{x_1} \{ f_1(x_1) + j_1(x_1) + F_2(x_2) \},$$

где

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 100(x_1 - x_0), & \text{при } x_1 \leq x_0, \\ 70(x_0 - x_1), & \text{при } x_1 \geq x_0, \end{cases}$$

и

$$j_1(x_1) = \begin{cases} 80(x_1 - 2), & \text{при } x_1 \leq 2, \\ 110(2 - x_1), & \text{при } x_1 \geq 2. \end{cases}$$

Поскольку x_0 задано по условиям задачи, найдем условно-оптимальные затраты только при $x_0 = 2$.

При $x_0 = 2$

$$x_1 = 0 \Rightarrow F_1(x_1) = 70(2 - 0) + 110(2 - 0) + 660 = 1020 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow F_1(x_1) = 70(2 - 1) + 110(2 - 1) + 560 = 740 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow F_1(x_1) = 0 + 0 + 460 = 460 \text{ тыс. руб.},$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow F_1(x_1) = 100(3 - 2) + 80(3 - 2) + 360 = 540 \text{ тыс. руб.}$$

.

Таким образом, условно-оптимальные затраты на первом шаге процесса составляют 460 тыс. руб. при управлении $x_1 = 2$.

7-й этап. Определение безусловно оптимальных затрат управлений.

Для затрат в первом квартале оптимальным является управление $x_1 = 2$.

Поскольку $x_1 = x_0$, затраты в первом квартале равны 0. Во втором квартале оптимальным управлением является $x_2 = 3$, затраты составляют 320 тыс. руб. В третьем квартале оптимальным является также управление $x_3 = 3$, а затраты соответственно составляют 0. Наконец, в четвертом квартале оптимально управление $x_4 = 1$, при котором затраты составят 140 тыс. руб. Общая сумма затрат составит 460 тыс. руб.

Таким образом, оптимальное распределение производственных

мощностей на строящемся объекте соответствует следующему плану подрядной организации: в первом квартале используются имеющиеся производственные мощности, рассчитанные на объем 2 млн. руб. строительно-монтажных работ; во втором квартале производственные мощности на объекте увеличиваются на одну условную единицу, этот их уровень не изменяется и в третьем квартале, а в четвертом – две условные единицы производственных мощностей перебрасываются с рассматриваемого объекта на другие. Затраты по управлению производственными мощностями при этом плане будут минимальными и составят 460 тыс. руб.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Класс задач, в которых рассматривается оптимальное управление запасами, является наиболее характерными для динамического программирования. Это обусловлено тем, что в задачах управления запасами процесс естественно разворачивается во времени, причем управление как раз и заключается в том, что решение на данном промежутке времени принимается с учетом того состояния, к которому пришла система за предшествующие периоды времени. Кроме того, эти задачи связаны, как правило, с дискретным характером переменных и, следовательно, решаются довольно сложно другими методами. Наконец, весьма важным обстоятельством является то, что форма зависимостей задачи для каждого периода времени является довольно простой (часто – линейной), что облегчает решение частной задачи оптимизации на каждом шаге, в то время как единовременное решение общей задачи с большим числом переменных (для многих промежутков времени и кусочно – линейной или нелинейной целевой функцией для всего процесса) является достаточно сложным.

Проблема управления запасами является одной из важнейших областей практического приложения экономико – математических методов, в том числе методов математического программирования. Мы ограничимся

анализом некоторых простейших задач с целью иллюстрации их решения методами динамического программирования.

При формулировке задач управления запасами используются такие понятия.

Запасы – это любые денежные или материальные ценности, которые периодически пополняются (производятся, доставляются и т. д.) и некоторое время сохраняются с целью расходования их в последующие промежутки времени. Уровень запасов в любой момент времени определяется начальным уровнем запасов плюс пополнение и минус расход за промежуток времени от начального момента до данного.

Управление запасами в общем случае состоит в воздействии на соотношение между двумя основными факторами – пополнением и расходом. Цель управления – оптимизация некоторого критерия, зависящего от расходов на хранение запасов, стоимости поставок, затрат, связанных с пополнением, штрафов и т.д.

В такой общей постановке подобные задачи могут иметь самое разнообразное практическое применение. Например, под запасами можно понимать продукцию предприятия, которая производится непрерывно (пополнение) и отгружается потребителям определенными дискретными партиями (расход). При этом спрос на продукцию предполагается наперед заданным (детерминированный спрос) или подверженным случайным колебаниям (стохастическая задача). Управление запасами состоит в определении размеров необходимого выпуска продукции для удовлетворения заданного спроса. Цель – минимизация суммарных расходов на хранение и пополнение запасов. Под запасами можно понимать запасы сырья или других материалов, поставляемых дискретными партиями (пополнение) и должных обеспечить непрерывное потребление в процессе производства (расход). Критерием оптимальности могут служить суммарные затраты на хранение запасов, замораживание оборотных средств и поставки запасов.

Запасами могут быть товары, поставляемые в магазин определенными партиями и предназначенные для удовлетворения непрерывного, но подверженного случайным колебаниям покупательского спроса. Критерий оптимальности – суммарные затраты на поставки, хранение запасов и изменение производственного ритма в связи с вариациями спроса.

Запасами могут быть и сезонные товары, сохраняющиеся на складе ограниченной емкости. Товары можно покупать и продавать в различных количествах по ценам, меняющимся во времени. Задача состоит в определении политики покупок и продаж, обеспечивающих максимум суммарной прибыли, и является примером задачи складирования.

Число таких примеров можно умножить. Мы будем рассматривать лишь некоторые простейшие динамические модели задач управления запасами.

Если в задаче исходные данные определены однозначно, то задачи называются детерминированными; если же хотя бы часть данных носит случайный характер и заданы распределения вероятностей, то соответствующие задачи называются стохастическими. Ограничимся примерами детерминированных задач управления запасами.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ПРИ ЗАДАННОМ РАСХОДЕ

Рассмотрим модель задачи управления запасами при заданном расходе. Управление в этих задачах будет сводиться пополнению.

Планируемый период разделен на n промежутков времени (дни, месяцы, кварталы и т.д.), в которых задан расход d_k ($k=1,2,\dots,n$), производимый в конце каждого из промежутков. Известны начальный уровень запасов и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от среднего уровня хранимых запасов и их пополнения. Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом

промежутке времени для удовлетворения заданного расхода из условия минимизации суммарных затрат за весь планируемый период времени.

Составим модель задачи.

Введем обозначения:

x_k – размер пополнения запасов в k -м промежутке времени;

y_{k-1} – уровень запасов в начале k -го промежутка (после произведенного расхода);

$\bar{y}_k$ – средний уровень запасов в k -ом промежутке.

Согласно условию, суммарные затраты в k -ом промежутке зависят от x_k и $\bar{y}_k$

$$\bar{y}_k = y_{k-1} + \frac{x_k}{2}. \quad (1)$$

Следовательно, затраты в k -м промежутке можно рассматривать как функцию $f_k(y_{k-1}, x_k)$.

Целевая функция задачи – суммарные затраты – запишется в виде

$$Z = \sum_{k=1}^n f_k(y_{k-1}, x_k). \quad (2)$$

Требуется определить переменные x_k , которые связаны с переменными y_{k-1} балансовыми уравнениями

$$y_k = y_{k-1} + x_k - d_k, \quad (3)$$

выражающими уровень запаса в начале $(k + 1)$ -го промежутка через сумму уровня запасов в начале k -го промежутка (y_{k-1}) и пополнения запасов в этом промежутке x_k и минус расход d_k .

Условия удовлетворения расхода в каждом промежутке можно выразить с помощью неравенств

$$y_k \geq 0. \quad (4)$$

Наконец, переменные x_k по смыслу должны удовлетворять условиям неотрицательности

$$x_k \geq 0 \quad (5)$$

Ставится задача – найти совокупность n переменных x_k , удовлетворяющих ограничениям (3) – (5) и минимизирующих функцию (2).

Подобные задачи при большом числе переменных и нелинейности функций $f_k(y_{k-1}, x_k)$ другими методами математического программирования решаются сложно. Особенно сложным становится решение, когда на переменные x_k налагаются условия целочисленности (или в общем случае – дискретности), как это часто бывает.

Дадим описание динамической модели задачи. Будем рассматривать n – шаговый процесс оптимизации с параметрами состояния y_k и переменными управления x_k . Тогда равенство (3) представляет собой уравнение состояния. Здесь удобнее использовать прямую схему расчета, так как задано конечное состояние.

В задачах управления запасами чаще всего возникает именно такая ситуация, поэтому продемонстрируем построение прямой схемы вычислений.

Обозначим через $Z_k^*(y_k)$ условно оптимальные затраты за промежутки, начиная с 1–го до k -го включительно, если в конце k -го промежутка уровень запасов равен y_k .

Этап условной оптимизации.

Начнем с условной оптимизации 1 – го шага в предположении, что к концу этого шага система окажется в состоянии y_1 :

$$Z_1^*(y_1) = \min_{x_1} \{f_1(y_0, x_1)\}. \quad (6)$$

На k -ом шаге получим соответственно

$$Z_k^*(y_k) = \min_{x_k} \{f_k(y_{k-1}, x_k) + Z_{k-1}^*(y_{k-1})\}. \quad (7)$$

В соответствии с формой рекуррентных соотношений удобно и уравнение состояния (3) записать в виде

$$y_{k-1} = y_k - x_k + d_k. \quad (8)$$

При решении локальных задач в соответствии с уравнениями (6) и (7) будем считать, что состояние y_k в конце шага известно. Поэтому и неравенство (4) удобно записать для y_{k-1} т. е. в виде

$$y_{k-1} = y_k - x_k + d \geq 0,$$

откуда следуют ограничения на x_k :

$$x_k \leq y_k + d_k. \quad (9)$$

Функцию затрат также удобно привести к зависимости от состояния в конце шага, используя уравнение (8):

$$f_k(y_{k-1}, x_k) = f_k(y_k - x_k + d_k, x_k).$$

Выполнив условную оптимизацию, получим последовательно

$$Z_1^*(y_1), x_1^*, K, Z_k^*(y_k), x_k^*, K, Z_n^*(y_n), x_n^*.$$

Этап безусловной оптимизации.

Находим

$$Z_{\max} = Z_n^*(y_n^*)$$

при заданном конечном состоянии, или

$$Z_{\max} = \max Z_n^*(y_n) \text{ и } y_n^*,$$

если конечное состояние не задано. Затем последовательно определяем

$$\begin{aligned} x_n^* &= x_n^*(y_n^*), \\ y_{n-1}^* &= y_n^* - x_n^* + d_n, \quad x_{n-1}^* = x_{n-1}^*(y_{n-1}^*), \\ y_1^* &= y_2^0 - x_2^* + d_2, \quad x_1^* = x_1^*(y_1^*). \end{aligned}$$

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ ЗАДАННОМ РАСХОДЕ

Определим оптимальное пополнение запасов в течение четырех периодов при следующих условиях:

$$y_0 = 100; \quad y_4 = 0; \quad d_1 = 150; \quad d_2 = 50; \quad d_3 = d_4 = 100;$$

пополнение запасов может производиться партиями, кратными 50; функция затрат на хранение $j(\overline{y_k})$ и на пополнение $y(x_k)$, одинаковые для всех периодов времени, заданы в таблице:

Таблица 5.

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$j(t)$	0	3	8	15	30	40	49	55	58	60	62	64	65
$y(t)$	0	-	22	-	32	-	35	-	50	-	70	-	90

Задача носит дискретный характер.

Поскольку расход и пополнение кратны 50, расчеты будем вести в целых партиях. Таким образом,

$$y_0 = 2; y_4 = 0; d_1 = 3; d_2 = 1; d_3 = d_4 = 2;$$

переменные x_k и параметры y_k меняются с шагом в единицу.

Определим допустимые (предельные) значения для параметров состояния (x_k, y_k) .

$$y_4 = 0, d_4 = 2, y_3 = y_4 - x_4 + d_4 \quad \text{и} \quad y_3 = 0 - x_4 + 2$$

даже если $x_4 = 0$, то $\max y_3 = 2$ и $y_3 \leq 2$.

$$y_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$y_3 = 2, d_3 = 2, y_2 = y_3 - x_3 + d_3 \quad \text{и} \quad y_2 = 2 - x_3 + 2$$

даже если $x_3 = 0$, то $\max y_2 = 4$ и $y_2 \leq 4$.

$$y_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$y_2 = 4, d_2 = 1, y_1 = y_2 - x_2 + d_2 \quad \text{и} \quad y_1 = 4 - x_2 + 1$$

даже если $x_2 = 0$, то $\max y_1 = 5$ и $y_1 \leq 5$.

$$y_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Этап условной оптимизации

Первый шаг.

Из уравнения состояния имеем $y_1 = y_2 - x_2 + d_2$ и $x_1 = y_1 - y_0 + d_1$,

так как $y_0 = 2, d_1 = 3$, то

$$x_1 = y_1 - y_0 + d_1 = y_1 - 2 + 3 = y_1 + 1,$$

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{x_1}{2} \text{ и } \bar{y}_1 = 2 + 0,5y_1 + 0,5 = 2,5 + 0,5y_1,$$

$$Z_1^*(y_1) = \min_{x_1} \{ \bar{y}_1 + y(x_1) \} \text{ и}$$

$$Z_1^*(y_1) = \min_{x_1} \{ (2,5 + 0,5y_1) + y(y_1 + 1) \},$$

$$y_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Расчеты первого шага приведены в таблице:

Таблица 6.

y_1	x_1	$\bar{y}_1$	$j(\bar{y}_1)$	$y(y_1 + 1)$	$Z^*(y_1)$
0	1	2,5	40	22	62
1	2	3	49	32	81
2	3	3,5	55	35	90
3	4	4	58	50	108
4	5	4,5	60	70	130
5	6	5	62	90	152

Второй шаг.

$$y_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \text{ ; } d_2 = 1,$$

$$y_1 = y_2 - x_1 + 1,$$

$$y_1 \geq 0 \text{ и } x_2 \leq y_2 + 1,$$

$$Z_2^*(y_2) = \min_{0 \leq x_2 \leq y_2 + 1} \{ \bar{y}_2 + y(x_2) + Z_1^*(y_1) \}.$$

Расчеты второго шага приведены в таблице:

Таблица 7.

y_2	x_2	y_1	$\bar{y}_2$	$j(\bar{y}_2)$	$y(x_2)$	$Z_1^*(y_1)$	$Z_2(y_2)$	$Z_2^*(y_2)$
0	0	1	1	8	0	81	89	87
	1	0	0,5	3	22	62	87	

1	0	2	2	30	0	90	120	102
	1	1	1,5	15	22	81	118	
	2	0	1	8	32	60	102	
2	0	3	3	49	0	108	157	112
	1	2	2,5	40	22	90	152	
	2	1	2	30	32	81	143	
	3	0	1,5	15	35	62	112	
3	0	4	4	58	0	130	188	142
	1	3	3,5	55	22	108	185	
	2	2	3	49	32	90	181	
	3	1	2,5	40	35	81	176	
	4	0	2	30	50	62	142	
4	0	5	5	62	0	152	214	172
	1	4	4,5	60	22	130	212	
	2	3	4	58	32	108	198	
	3	2	3,5	55	35	90	180	
	4	1	3	49	50	81	180	
	5	0	2,5	40	70	62	172	

Третий шаг.

$$y_3 = \{0, 1, 2\}, \quad d_3 = 2,$$

$$y_2 = y_3 - x_3 + 2,$$

$$y_2 \geq 0 \text{ и } x_3 \leq y_3 + 2,$$

$$Z_3^* = \min_{0 \leq x_3 \leq y_3 + 2} \{ \bar{y}_3 + y(x_3) + Z_2^*(y_3) \}.$$

Расчеты третьего шага приведены в таблице:

Таблица 8.

y_3	x_3	y_2	$\bar{y}_3$	$j(\bar{y}_3)$	$y(x_3)$	$Z_2^*(y_2)$	$Z(y_3)$	$Z^*(y_3)$

0	0	2	2	30	0	112	142	12
	1	1	1,5	15	22	102	139	
	2	0	1	8	32	87	127	
1	0	3	3	49	0	142	191	137
	1	2	2,5	40	22	112	174	
	2	1	2	30	32	102	164	
	3	0	1,5	15	35	87	137	
2	0	4	4	58	0	172	230	167
	1	3	3,5	55	22	142	219	
	2	2	3	49	32	112	193	
	3	1	2,5	40	35	102	177	
	4	0	2	30	50	87	167	

Четвертый шаг.

$$y_4 = 0, \quad d_4 = 2$$

$$y_3 = y_4 - x_4 + 2,$$

$$y_3 \in [0, 2] \quad x_4 \in [2, 2]?$$

$$Z_4^*(y_4) = \min_{0 \leq x_4 \leq 2} \{j(\bar{y}_4) + y(x_4) + Z_3^*(y_3)\}.$$

Расчеты четвертого шага приведены в таблице:

Таблица 9.

y_4	x_4	y_3	$\bar{y}_4$	$j(\bar{y}_4)$	$y(x_4)$	$Z_2^*(y_2)$	$Z(y_3)$	$Z^*(y_3)$
0	0	2	2	30	0	167	197	167
	1	1	1,5	15	22	137	174	
	2	0	1	8	32	12	167	

Этап безусловной оптимизации.

После выполнения этапа условной оптимизации получим:

$$Z_{\min} = Z_4^*(0), \quad \text{при} \quad x_4^* = 2.$$

Далее последовательно вычисляем

$$y_3^* = y_4^* - x_4 + 2 \quad \text{и} \quad y_3^* = 0 - 2 + 2 = 0.$$

По таблице третьего шага находим $x_3^* = 2$.

$$y_2^* = y_3^* - x_3 + 2 \quad \text{и} \quad y_2^* = 0 - 2 + 2 = 0.$$

По таблице второго шага находим $x_2^* = 1$.

$$y_1^* = y_2^* - x_2 + 1 \quad \text{и} \quad y_1^* = 0 - 1 + 1.$$

По таблице первого шага получаем $x_1^* = 1$.

Таким образом, оптимальное пополнение запасов имеет вид:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 2,$$

при этом получим минимальные расходы $Z = 167$.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТАМИ

Автоматизированная система сетевого планирования и управления возникла в 1958 году в США для управления разработкой и строительством некоторых больших систем и получила очень быстро широкое распространение и признание как за рубежом, так и у нас в стране.

Опираясь на современную вычислительную технику, эта система позволяет создавать проекты, которые наряду с эффективным использованием времени и других ресурсов, обеспечивает также возможность четкого оперативного руководства при реализации этих, часто весьма сложных проектов.

Автоматизация процесса управления состоит из двух этапов.

На первом этапе – планирования разработки, при помощи метода сетевого планирования выражают наглядно сложные соотношения между отдельными работами, заблаговременно выделяют напряженные участки работ и составляют оптимальный план-проект, минимизирующий разработку по времени, по стоимости или оптимизирующий ее по другим производственным показателям.

На втором этапе – управления ходом разработки (реализацией проекта), на основании поступающей информации и ее переработки происходит контроль за выполнением плана, составленного на первом этапе, и внесение в него необходимых корректив.

Сложность задач, решаемых руководителями фирм и предприятий в условиях рыночной экономики, требует от них знания и умелого применения методов эффективного управления и контроля.

Одним из таких методов является планирование и управление с использованием сетевых моделей. Сетевое планирование и управление предназначено для управления комплексом взаимосвязанных работ, требующих четкой координации многих исполнителей.

Многие реальные проекты, такие как строительство дома и транспортной сети города, изготовление и сборка машин и механизмов, разработка технических устройств и программного обеспечения, обработка заказов в торговле, а также процессы приготовления кофе и обучения в институте могут быть детализированы в форме выполнения большого количества различных операций или работ. Некоторые из этих операций могут выполняться одновременно или параллельно, другие – только последовательно, когда та или иная операция может начаться только после окончания других операций. Например, при строительстве дома можно параллельно выполнять работы по внутренней отделке помещений и озеленению прилегающей к дому территории. При разработке программного обеспечения можно одновременно выполнять написание программ для одних модулей и тестирование других модулей.

В то же время последовательное выполнение операций бизнес-процесса требует согласования времени начала и окончания отдельных работ. Например, при строительстве дома выполнение работы по внутренней отделке помещений может начаться только после того, как будут закончены работы по возведению стен и крыши дома. При разработке программного обеспечения написание программ для отдельных модулей может быть начато

после спецификации требований к ним, например, в форме вариантов использования.

Сетевая модель – это графическое изображение плана выполнения работ в виде ориентированного графа.

Граф – это множество вершин и соединяющих их дуг (ребер). Ориентированный граф – граф, на котором все дуги помечены стрелками, что позволяет определить, какая из любой пары смежных вершин является конечной, а какая начальной.

Два основных элемента сетевой модели – работа и событие.

Работа – это процесс, требующий затрат ресурсов.

Ожидание – это тоже работа, поскольку расходуется такой ресурс, как время.

Фиктивная работа – это связь между событиями без затрат ресурсов.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Начальное событие – событие, не имеющее предшествующих событий.

Завершающее событие – событие, не имеющее последующих событий.

Путь – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Для построения сетевой модели важное значение имеет подготовительный этап работы. На этом этапе определяются перечень и последовательность выполнения работ, взаимосвязи исполнителей (работ), продолжительность выполнения отдельных работ, потребность в ресурсах, а также осуществляется вербальная (описательная) постановка задачи.

Сетевые модели обычно изображают в виде графа, включающего вершины – события и соединяющие их дуги – работы. При этом используются следующие правила:

- ~ При вычерчивании сетевого графика работы располагают так, чтобы каждая работа следовала за теми, от которых она зависит.
- ~ События нумеруют слева на право и сверху вниз.

- ~ В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
- ~ В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.
- ~ В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т. е. путей, соединяющих некоторые события с ними самими.
- ~ Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой – стрелкой.
- ~ В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее события.

Одно из важнейших понятий сетевого графика – понятие пути. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет полный путь – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Нахождение критического пути в сетевом графике позволяет выявить операции бизнес-процесса, которые наиболее критичны ко времени своего выполнения. Действительно, увеличение времени выполнения операций, лежащих на критическом пути, приводит к однозначному увеличению общего времени выполнения бизнес-процесса. Тем самым управление бизнес-процессом приобретает приоритетный характер и направлено на предотвращение незапланированных задержек с выполнением в первую очередь тех операций, которые входят в критический путь соответствующего сетевого графа. С другой стороны, уменьшение времени выполнения таких операций за счет внутренних резервов бизнес - системы способно привести к сокращению общего времени выполнения всей совокупности операций, что является одной из целей оптимизации бизнес-процессов.

Таким образом, операции критического пути получают более высокий приоритет по сравнению с остальными операциями бизнес-процесса, а задача построения сетевого графика бизнес-процесса и нахождения критического пути в этом сетевом графе становится важным элементом моделирования бизнес-процессов.

При анализе сетевых графов прежде всего вычисляют его временные параметры. К основным временным параметрам относятся продолжительность критического пути (критический срок), резервы времени событий и резервы времени работ.

Критический путь – это наиболее протяженный во времени полный путь; его продолжительность и определяет критический срок T . Критических путей на сетевом графе может быть несколько.

Ранний срок $(t_p(j))$ совершения события j – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(j) = \max_{(i,j) \in U_j^+} (t_p(i) + t(i,j)),$$

где U_j^+ – множество работ, заканчивающихся j -м событием;

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i,j) ;

$t(i,j)$ – продолжительность работы (i,j) .

Предполагается, что $t_p(I) = 0$, $t_p(S) = t_{кр}$,

где I – вход (исток) графа;

S – выход (сток) графа.

Поздний срок $t_n(i)$ – свершения события i – такой предельный момент, после которого остаётся ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$$t_n(i) = \min_{(i,j) \in U_i^-} (t_n(j) - t(i,j)),$$

где U_i^- – множество работ, начинающихся i -ым событием;

$t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i,j) .

Для завершающего события S предполагается, что $t_n(S) = t_p(S) = t_{кр}$.

Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Ранний срок начала работы (i,j)

$$t_{p.n}(i, j) = t_p(i). \text{Equation.3}$$

Ранний срок окончания работы (i,j)

$$t_{p.o.}(i, j) = t_p(i) + t(i, j).$$

Поздний срок начала работы (i,j)

$$t_{n.n}(i, j) = t_n(j) - t(i, j).$$

Поздний срок окончания работы (i,j)

$$t_{n.o}(i, j) = t_n(j).$$

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i,j) \in U_j^+} t_{p.o}(i, j),$$

а поздний срок свершения события i – по формуле

$$t_n(i) = \min_{(i,j) \in U_i^-} t_{n.n}(i, j).$$

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i,j) – это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить её продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершён в критический срок:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_n(j) - t_{p.o}(i, j).$$

Свободный резерв времени $R_c(i, j)$ работы (i,j) – это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить её продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_p(j) - t_{p.o}(i, j).$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Отметим основные преимущества сетевого планирования перед другими методами планирования и управления.

1. Концентрация внимания менеджера на наиболее важных участках работ.
2. Установление четкой взаимосвязи между исполнителями.
3. Возможность рационального маневрирования ресурсами.
4. Экономия времени, средств, материалов и других ресурсов.
5. Создание объективной картины работ.
6. Возможность алгоритмизации и решения задачи на ЭВМ.

В настоящее время модели и методы сетевого планирования широко используются при планировании и осуществлении строительно – монтажных работ, планировании торговой деятельности, составлении бухгалтерских отчетов, разработке торгово - финансового плана и т. д.

МЕТОД КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

В данной главе показаны возможности использования метода СРМ (Critical Path Method – метод критического пути) для контроля сроков выполнения проекта. При реализации проекта составляется график выполнения работ. Для того чтобы проект был завершен вовремя, необходимо контролировать сроки выполнения этих работ. Взаимосвязанность работ является усложняющим фактором. Некоторые операции зависят от выполнения других работ и не могут начаться, пока предшествующие работы не будут завершены.

Важной предпосылкой применения метода СРМ является предположение о том, что время выполнения каждой работы точно известно. В результате использования метода СРМ удастся получить ответы на следующие вопросы:

1. За какое минимальное время можно выполнить проект?
2. В какое время должны начаться и окончиться отдельные работы?

3. Какие работы являются критическими и должны быть выполнены точно в установленное время, чтобы не сорвать срок выполнения проекта?
4. На какое время можно отложить срок выполнения некритической работы, чтобы она не повлияла на срок выполнения проекта?

Исходным шагом для применения метода СРМ является описание проекта в виде перечня выполняемых работ с указанием их взаимосвязи. Существует два способа описания проекта: табличный и графический.

Пример. Рассматривается возможность реконструкции торгового центра.

Проектом предусматривается строительство павильонов с последующей сдачей их в аренду торговым фирмам. Работы, которые необходимо выполнить при реализации проекта, а также взаимосвязь работ и время их выполнения указаны в таблице.

Таблица 10.

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Время выполнения (недели)
A	Подготовить архитектурный проект	-	5
B	Определить будущих арендаторов	-	6
C	Подготовить проспект для арендаторов	A	4
D	Выбрать подрядчика	A	3
E	Подготовить документы для получения разрешения	A	1
F	Получить разрешение на строительство	E	4
G	Осуществить строительство	D, F	14
H	Заключить контракты с арендаторами	B, C	12
I	Вселить арендаторов в павильоны	G, H	2

Построим табличное представление проекта, используя исходную информацию.

Таблица 11.

Работа	Предшествующие работы	Время выполнения
A	-	5
B	-	6
C	A	4
D	A	3
E	A	1
F	E	4
G	D, F	14
H	B, C	12
I	G, H	2

Используя для построения сетевого графика следующие правила:

1. При вычерчивании сетевого графика работы располагают так, чтобы каждая работа следовала за теми, от которых она зависит.
2. События нумеруют слева направо и сверху вниз.
3. В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
4. В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.
5. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т. е. путей, соединяющих некоторые события с ними самими.
6. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой – стрелкой.
7. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее события.

Получим графическое представление проекта.

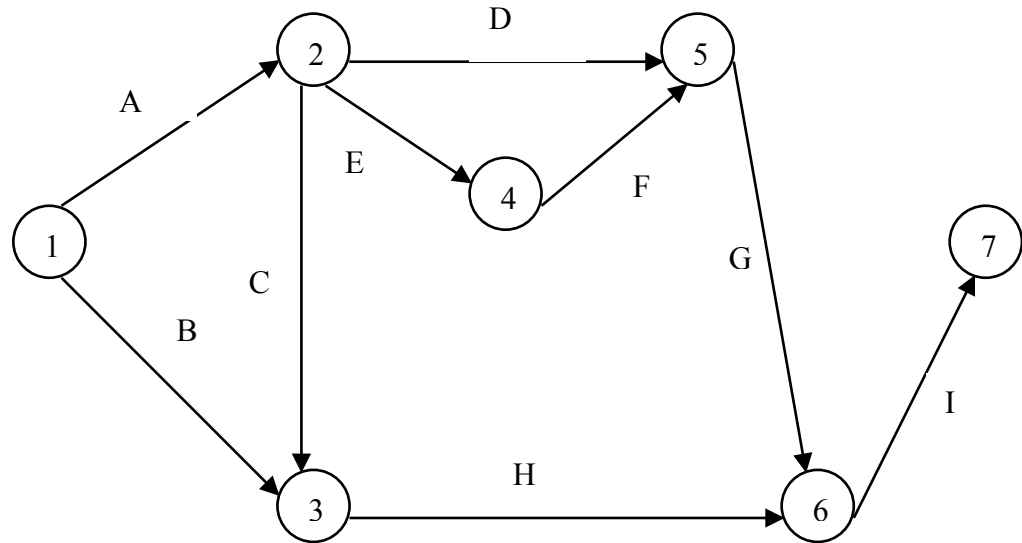


Рис. 1. Сетевой график

Проект представлен в виде графа с вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и дугами A, B, C, D, E, F, G, H, I. Каждая вершина графа отображает определенное событие. Событие 1 означает начало выполнения проекта (такое событие также обозначают S). Событие 7 означает завершение проекта. Любая работа проекта – это упорядоченная пара двух событий.

Работа A – упорядоченная пара событий (1,2).

Работа B – упорядоченная пара событий (1,3).

Работа C – упорядоченная пара событий (2,3).

Работа D – упорядоченная пара событий (2,5).

Работа E – упорядоченная пара событий (2,4).

Работа F – упорядоченная пара событий (4,5).

Работа G – упорядоченная пара событий (5,6).

Работа H – упорядоченная пара событий (3,6).

Работа I – упорядоченная пара событий (6,7).

Применение метода критического пути предполагает выполнение двух шагов. На первом, называемом шагом вперед, находятся самые ранние моменты начала и окончания всех работ проекта, а также рассматривается

минимальная длительность реализации проекта. На втором, называемом шагом назад, определяются самые поздние моменты начала и окончания работ, строится временной график реализации проекта, а также рассчитываются резервы времени выполнения каждой работы.

Шаг вперед.

Воспользуемся следующими обозначениями:

ES – самый ранний момент начала рассматриваемой работы;

EF – самый ранний момент окончания рассматриваемой работы;

t – длительность выполнения рассматриваемой работы.

Очевидна зависимость:

$$EF = ES + t.$$

Работа А начинается в начальной вершине, поэтому

$$ES = 0,$$

$$EF = 0 + 5 = 5.$$

Работа В также начинается в начальной вершине, поэтому

$$ES = 0,$$

$$EF = 0 + 6 = 6.$$

Работа С может начаться только по завершении работы А, поэтому

$$ES = 5,$$

$$EF = 5 + 4 = 9.$$

Работа D может начаться только по завершении работы А, поэтому

$$ES = 5,$$

$$EF = 5 + 3 = 8.$$

Работа Е может начаться только по завершении работы А, поэтому

$$ES = 5,$$

$$EF = 5 + 1 = 6.$$

Работа F начинается только по завершении работы Е, поэтому

$$ES = 6,$$

$$EF = 6 + 4 = 10.$$

Работа G может начаться по завершении работ D и F, т.е. момент ее начала не может быть меньше последнего из моментов завершения каждой из этих работ, поэтому

$$ES = \max\{10, 8\} = 10,$$

$$EF = 10 + 14 = 24.$$

Работа H может начаться по завершении работ B и C, т.е. момент ее начала не может быть меньше последнего из моментов завершения каждой из этих работ, поэтому

$$ES = \max\{6, 9\} = 9,$$

$$EF = 9 + 12 = 21.$$

Работа I может начаться по завершении работ G и H, т.е. момент ее начала не может быть меньше последнего из моментов завершения каждой из этих работ, поэтому

$$ES = \max\{24, 21\} = 24,$$

$$EF = 24 + 2 = 26.$$

Обозначим через T минимальную длительность реализации проекта. У нас есть работа, завершающаяся в конечной вершине 7. Окончание выполнения этой работы свидетельствует о завершении реализации проекта, поэтому

$$T = 26.$$

Шаг назад.

Воспользуемся следующими дополнительными обозначениями:

LS - самый поздний момент начала рассматриваемой работы;

LF - самый поздний момент окончания рассматриваемой работы;

Очевидна зависимость

$$LS = LF - t.$$

Вычисления начинаем с работы I, которая завершается в вершине 7. Очевидно, что для этой работы

$$LF = 26,$$

$$LS = 26 - 2 = 24.$$

Работа G должна завершиться не позднее момента 24, для того чтобы не сдвинуть сроки выполнения работы I, поэтому

$$LF = 24,$$

$$LS = 24 - 14 = 10.$$

Работа H также должна завершиться не позднее момента 24, для того чтобы не сдвинуть сроки выполнения работы I, поэтому

$$LF = 24,$$

$$LS = 24 - 12 = 12.$$

Работа F должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ G и I, поэтому

$$LF = 10,$$

$$LS = 10 - 4 = 6.$$

Работа D должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ G и I, поэтому

$$LF = 10,$$

$$LS = 10 - 3 = 7.$$

Работа E должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ F, G и I, поэтому

$$LF = 6,$$

$$LS = 6 - 1 = 5.$$

Работа C должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ H и I, поэтому

$$LF = 12,$$

$$LS = 12 - 4 = 8.$$

Работа B должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ H и I, поэтому

$$LF = 12,$$

$$LS = 12 - 6 = 6.$$

Работа A должна завершиться так, чтобы не сдвинуть сроки выполнения следующих за ней работ C, D и E, поэтому

$$LF = \min\{8, 7, 5\} = 5$$

$$LS = 5 - 5 = 0.$$

Определим резервы времени работы как время, на которое мы можем удлинить ее выполнение без увеличения времени реализации проекта в целом. Очевидна зависимость

$$\text{Резерв} = LS - ES = LF - EF.$$

Работа А

$$\text{Резерв} = 0 - 0 = 0.$$

Работа В

$$\text{Резерв} = 6 - 0 = 6.$$

Работа С

$$\text{Резерв} = 8 - 5 = 3.$$

Работа D

$$\text{Резерв} = 7 - 5 = 2.$$

Работа E

$$\text{Резерв} = 5 - 5 = 0.$$

Работа F

$$\text{Резерв} = 6 - 6 = 0.$$

Работа G

$$\text{Резерв} = 10 - 10 = 0.$$

Работа H

$$\text{Резерв} = 12 - 9 = 3$$

Работа I

$$\text{Резерв} = 24 - 24 = 0.$$

Если для некоторой работы резерв времени равен нулю, то длительность выполнения этой работы не может быть увеличена без увеличения времени реализации проекта в целом и, следовательно, эта работа лежит на критическом пути.

Таким образом, на критическом пути лежат работы А, Е, F, G, I.

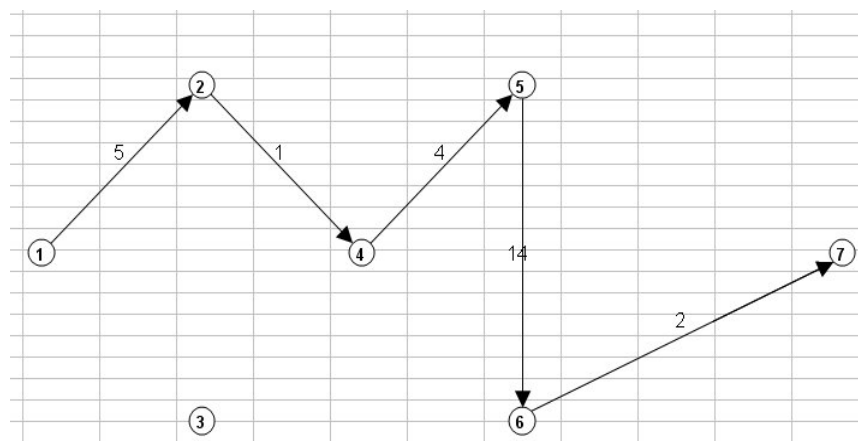


Рис. 2 Критический путь из вершины 1 в вершину 7.

Результаты расчетов представлены в виде следующей таблицы.

Таблица 12.

Работа	Время выполнения	Ранний срок начала работы	Ранний срок окончания работы	Поздний срок начала работы	Поздний срок окончания работы	Полный резерв времени работы
A	5	0	5	0	5	0
B	6	0	6	6	12	6
C	4	5	9	8	12	3
D	3	5	8	7	10	2
E	1	5	6	5	6	0
F	4	6	10	6	10	0
G	14	10	24	10	24	0
H	12	9	21	12	24	3
I	2	24	26	24	26	0

Эта таблица содержит информацию, позволяющую ответить на любой вопрос задачи.

Критические работы имеют резерв времени равный нулю. Следовательно, отложить начало работ A, E, F, G, I нельзя. В тоже время работу B можно начать не в нулевой момент времени, а момент 6, т. е. начало

выполнения работы В можно отложить на 6 недель. Полный резерв времени работы В 6 недель.

Если время начала работы, не лежащей на критическом пути, отложить на срок меньший, чем полный резерв времени, то время, необходимое на выполнение всего проекта, не увеличится.

МЕТОД PERT

Метод PERT (Program Evaluation and Review Techniqui – метод оценки и обзора пропрограммы) используется для контроля сроков выполнения проекта.

Метод PERT ориентирован на анализ проектов, для которых продолжительность выполнения всех или некоторых работ не удастся определить точно. Он применяется при проектировании и внедрении новых систем. В таких проектах многие работы не имеют аналогов. В результате возникает неопределенность в сроках выполнения проекта в целом.

Применение метода PERT позволяет получить ответы на следующие вопросы:

1. Чему равно ожидаемое время выполнения работы?
2. Чему равно ожидаемое время выполнения проекта?
3. С какой вероятностью проект может быть выполнен за указанное время?

В методе PERT для экономического анализа используются следующие понятия:

- ~ оптимистическое время выполнения работы;
- ~ пессимистическое время выполнения работы;
- ~ наиболее вероятное время выполнения работы;
- ~ ожидаемое время выполнения работы;
- ~ вариация времени выполнения работы;

~ вариация времени выполнения проекта.

Для того, чтобы использовать метод PERT для каждой работы i , время выполнения которой является случайной величиной, необходимо определить три оценки:

- 1) оптимистическое время a_i – время выполнения работы i в наиболее благоприятных условиях;
- 2) наиболее вероятное время m_i – время выполнения работы i в нормальных условиях;
- 3) пессимистическое время b_i – время выполнения работы i в неблагоприятных условиях.

Учитывая, что время выполнения работы хорошо описывается β – распределением, среднее или ожидаемое время t_i , время выполнения работы i может быть приближенно оценено по формуле

$$t_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}.$$

Если время выполнения работы i известно точно и равно d_i , то

$$t_i = a_i = m_i = b_i = d_i.$$

Располагая указанными оценками времени выполнения работы, мы можем также рассчитать общепринятую статистическую меру неопределенности – дисперсию s_i^2 времени выполнения работы i

$$s_i^2 = \frac{b_i - a_i}{6}^2.$$

Если время выполнения работы i известно точно, то $s_i^2 = 0$.

Пусть T – время, необходимое для выполнения проекта. Если в проекте есть работы с неопределенным временем выполнения, то T является случайной величиной. Математическое ожидание (ожидаемое значение) времени выполнения проекта $E(T)$ ($M(T)$ – математическое ожидание) равно сумме ожидаемых значений времени работ, лежащих на критическом пути. Для определения критического пути проекта может быть использован метод

СРМ. На этом этапе анализа проекта время выполнения работы является равным ожидаемому - t_i . Дисперсия общего времени, необходимого для завершения проекта, в предположении о независимости времени выполнения работ, равна сумме дисперсий времен выполнения работ критического пути. Если же две или более работы взаимосвязаны, то указанная сумма дает приближенное представление о дисперсии времени выполнения проекта.

Распределение времени T завершении проекта является асимптотически нормальным со средним $E(T)$ и дисперсией s_i^2 . С учетом этого можно рассчитать вероятность завершения проекта в установленный срок T_o . Для определения вероятности того, что $T \leq T_o$, следует использовать таблицу распределения величины

$$Z = \frac{T_o - E(T)}{s(T)},$$

которая имеет стандартное нормальное распределение.

Пример. Новый продукт Московского часового завода.

Конструкторское бюро Московского часового завода (МЧЗ) разработало новый настольный радиобудильник. По мнению проектировщиков, запуск в серию нового продукта позволит расширить рынок сбыта и получить дополнительную прибыль.

Руководство МЧЗ приняло решение провести работу по изучению возможности реализации нового продукта. Конечным результатом этого исследования должен стать доклад с рекомендациями относительно действий, которые должны быть приняты для организации производства и сбыта нового продукта. Перечень работ и характеристики времени их выполнения (в неделях) указаны в следующей таблице.

Таблица 13.

Работа	Содержание работы	Непосредственно предшествующая	Оптимистическое время (a_i)	Наиболее вероятное время (m_i)	Пессимистическое время (b_i)
--------	-------------------	--------------------------------	---------------------------------	------------------------------------	----------------------------------

		работа			
1	2	3	4	5	6
A	Подготовить конструкторский проект	-	4	5	12
B	Разработать маркетинговый план	-	1	1,5	5
C	Подготовить маршрутные карты	A	2	3	4
D	Построить прототип	A	3	4	11
1	2	3	4	5	6
E	Подготовить рекламную брошюру	A	2	3	4
F	Подготовить оценки затрат	C	1,5	2	2,5
G	Провести предварительное тестирование	D	1,5	3	4,5
H	Выполнить исследование рынка	B, E	2,5	3,5	7,5
I	Подготовить доклад о ценах	H	1,5	2	2,5
J	Подготовить заключительный доклад	F, G, I	1	2	3

Определим критический путь для данного проекта и ответим на вопросы:

- 1) Чему равно ожидаемое время выполнения проекта?
- 2) С какой вероятностью проект может быть выполнен за 20 недель?

Используя информацию, указанную в таблице, определим ожидаемое время и вариацию (дисперсию) времени выполнения каждой работы проекта.

$$t_A = \frac{a_A + 4m_A + b_A}{6} = \frac{4 + 4 \times 5 + 12}{6} = 6,$$

$$t_B = \frac{a_B + 4m_B + b_B}{6} = \frac{1 + 4 \times 1,5 + 5}{6} = 2,$$

$$t_C = \frac{a_C + 4m_C + b_C}{6} = \frac{2 + 4 \times 3 + 4}{6} = 3,$$

$$t_D = \frac{a_D + 4m_D + b_D}{6} = \frac{3 + 4 \times 4 + 11}{6} = 5,$$

$$t_E = \frac{a_E + 4m_E + b_E}{6} = \frac{2 + 4 \times 3 + 4}{6} = 3,$$

$$t_F = \frac{a_F + 4m_F + b_F}{6} = \frac{1,5 + 4 \times 2 + 2,5}{6} = 2,$$

$$t_G = \frac{a_G + 4m_G + b_G}{6} = \frac{1,5 + 4 \times 3 + 4,5}{6} = 3,$$

$$t_H = \frac{a_H + 4m_H + b_H}{6} = \frac{2,5 + 4 \times 3,5 + 7,5}{6} = 4,$$

$$t_I = \frac{a_I + 4m_I + b_I}{6} = \frac{1,5 + 4 \times 2 + 2,5}{6} = 3,$$

$$t_J = \frac{a_J + 4m_J + b_J}{6} = \frac{1 + 4 \times 2 + 12}{6} = 3,$$

$$s_A^2 = \frac{a_A^2}{6} - \frac{a_A}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{12 - 4}{6} = 1,78,$$

$$s_B^2 = \frac{a_B^2}{6} - \frac{a_B}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{5 - 1}{6} = 0,44,$$

$$s_C^2 = \frac{a_C^2}{6} - \frac{a_C}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{4 - 2}{6} = 0,11,$$

$$s_D^2 = \frac{a_D^2}{6} - \frac{a_D}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{1 - 3}{6} = 1,78,$$

$$s_E^2 = \frac{a_E^2}{6} - \frac{a_E}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{4 - 2}{6} = 0,11,$$

$$s_F^2 = \frac{a_F^2}{6} - \frac{a_F}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{2,5 - 1,5}{6} = 0,03,$$

$$s_G^2 = \frac{a_G^2}{6} - \frac{a_G}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{4,5 - 1,5}{6} = 0,25,$$

$$s_H^2 = \frac{a_H^2}{6} - \frac{a_H}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{7,5 - 2,5}{6} = 0,69,$$

$$s_I^2 = \frac{a_I - a_I}{6} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma} = \frac{2,5 - 1,5}{6} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma} = 0,03,$$

$$s_J^2 = \frac{a_J - a_J}{6} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma} = \frac{3 - 1}{6} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma} = 0,11.$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 14.

Работа	Ожидаемое время выполнения	Дисперсия
A	6	1,78
B	2	0,44
C	3	0,11
D	5	1,78
E	3	0,11
F	2	0,03
G	3	0,25
H	4	0,69
I	2	0,03
J	2	0

Полагая время выполнения работы равным ожидаемому времени ее выполнения, найдем критический путь, используя метод СРМ в следующей таблицы с указанием предшествующих работ.

Таблица 15.

Работа	Предшествующая работа	Время выполнения
A	-	6
B	-	2
C	A	3
D	A	5

E	A	3
F	C	2
G	D	3
H	B, E	4
I	H	2
J	F, G, I	2

Графическое представление проекта имеет следующий вид.

Рис. 3. Сетевой график

Шаг вперед.

ES – самый ранний момент начала рассматриваемой работы;

EF – самый ранний момент окончания рассматриваемой работы;

Работа А:

$$ES = 0; \quad EF = 0 + 6 = 6.$$

Работа В:

$$ES = 0; \quad EF = 0 + 2 = 2.$$

Работа С:

$$ES = 6; \quad EF = 6 + 3 = 9.$$

Работа D:

$$ES = 6; \quad EF = 6 + 5 = 11.$$

Работа E:

$$ES = 6; \quad EF = 6 + 3 = 9.$$

Работа G:

$$ES = 11; \quad EF = 11 + 3 = 14.$$

Работа H:

$$ES = \max\{2, 9\} = 9; \quad EF = 9 + 4 = 13.$$

Работа I:

$$ES = 13; \quad EF = 13 + 2 = 15.$$

Работа J:

$$ES = \max\{11, 15, 8\} = 15; \quad EF = 15 + 2 = 17.$$

Окончание выполнения этой работы свидетельствует о завершении реализации проекта, поэтому $T = 17$.

Найденные значения ES и EF для каждой работы проекта представлены на рисунке.

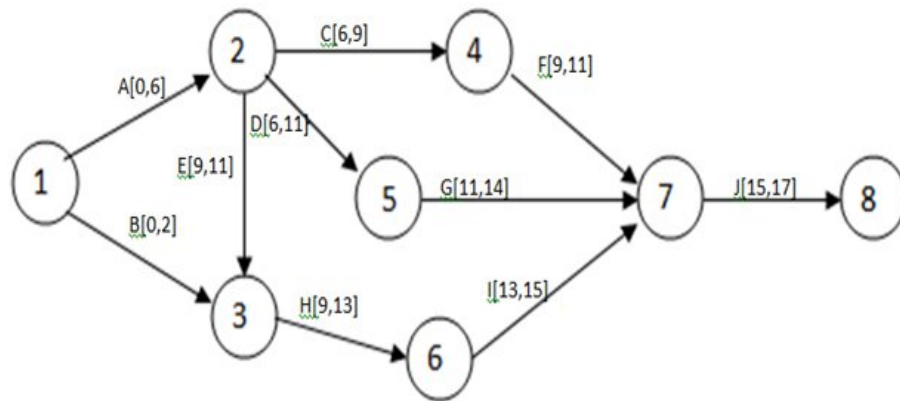


Рис. 4. Сетевой график

Шаг назад.

LS - самый поздний момент начала рассматриваемой работы;

LF - самый поздний момент окончания рассматриваемой работы;

Работа J:

$$LF = 17; \quad LS = 17 - 2 = 15.$$

Работа I:

$$LF = 15; \quad LS = 15 - 2 = 13.$$

Работа G:

$$LF = 15; \quad LS = 15 - 3 = 12.$$

Работа F:

$$LF = 15; \quad LS = 15 - 2 = 13.$$

Работа H:

$$LF = 13; \quad LS = 13 - 4 = 9.$$

Работа E:

$$LF = 9; \quad LS = 9 - 3 = 6.$$

Работа D:

$$LF = 12; \quad LS = 12 - 5 = 7.$$

Работа С:

$$LF = 13; \quad LS = 13 - 3 = 10.$$

Работа В:

$$LF = 9; \quad LS = 9 - 2 = 7.$$

Работа А:

$$LF = \min\{8, 7, 6\} = 6; \quad LS = 6 - 6 = 0.$$

Найдем резервы времени по формулам:

$$\text{Резерв} = LS - ES = LF - EF.$$

Все полученные результаты сведем в таблицу.

Таблица 16.

Работа	Время выполнения	Ранний срок начала работы	Ранний срок окончания работы	Поздний срок начала работы	Поздний срок окончания работы	Полный резерв времени работы
A	6	0	6	0	6	0
B	2	0	2	7	9	7
C	3	6	9	10	13	4
D	5	6	11	7	12	1
E	3	6	9	6	9	0
F	2	9	11	13	15	4
G	3	11	14	12	15	4
H	4	9	13	9	13	0
I	2	13	15	13	15	0
J	2	15	17	15	17	0

Если для некоторой работы резерв времени равен нулю, то длительность выполнения этой работы не может быть увеличена без увеличения времени реализации проекта в целом и, следовательно, эта работа лежит на критическом пути.

Критический путь для данного проекта включает работы А, Е, Н, I, J.

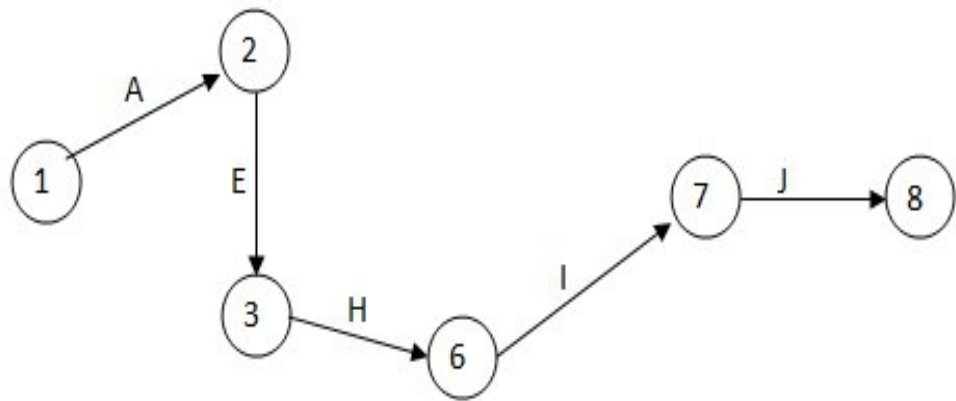


Рис. 5. Критический путь из вершины 1 в вершину 8.

Длина критического пути $T = 17$.

Это означает, что ожидаемое время выполнения проекта составляет 17 недель.

Предполагая, что распределение времени выполнения проекта является нормальным, можно определить вероятность того, что проект будет выполнен за 20 недель.

Определим дисперсию времени выполнения проекта. Его значение равно сумме дисперсий времен выполнения работ, лежащих на критическом пути

$$s^2(T) = 1,78 + 0,11 + 0,69 + 0,03 + 0,11 = 2,72.$$

Тогда стандартное отклонение

$$s(T) = \sqrt{s^2(T)} = \sqrt{2,72} = 1,65.$$

В этом случае мы предполагаем независимость длительностей выполнения работ.

Находим значение Z для нормального распределения при $T_0 = 20$.

$$Z = \frac{T_0 - E(T)}{s(T)} = \frac{20 - 17}{1,65} = 1,82.$$

По таблице нормального распределения получаем, что вероятность реализации проекта будет равна 0,9656. Т.е. вероятность того, что проект

будет выполнен за 20 недель при ожидаемом времени выполнения проекта 17 недель равна 0,9656.

Определим длительность реализации проекта с заданной вероятностью. Предположим, что нас интересует длительность реализации проекта с вероятностью равной 0,99.

Из таблиц нормального распределения выбираем соответствующее вероятности 0,99 значение $Z = 2,33$. Тогда

$$2,33 = \frac{x - 17}{1,65} \quad \text{Р} \quad x = 17 + 2,33 \cdot 1,65 = 20,84.$$

Длительность реализации проекта, которая будет соблюдена с вероятностью 0,99, равна 20,84 недель.

КОНТРОЛЬ ЗАТРАТ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОЕКТА.

Предположим, что ожидаемое время выполнения проекта нас не устраивает и мы хотели бы его уменьшить. Сокращение времени выполнения проекта, как правило, связано с использованием дополнительных ресурсов, таких как увеличение количества рабочих, внеурочное время. Следовательно, сокращение срока выполнения проекта приводит к увеличению затрат на его реализацию. В результате требуется искать компромисс между сокращением времени выполнения той или иной работы и экономией дополнительных затрат на проект. Для расчета минимальных затрат, необходимых для сокращения времени реализации проекта, может быть использована модель линейного программирования.

Для планирования затрат, составления графика расходования средств и осуществления контроля за этим расходованием может быть использован метод анализа затрат PERT/COST. Конечная цель применения метода PERT/COST состоит в том, чтобы затраты на реализуемый проект соответствовали принятой смете. Составление сметы расходов на

реализацию проекта обычно предполагает выявление всех затрат на проект, а затем распределение этих затрат во времени. На этапах выполнения проекта фактические затраты могут быть сравнены с планируемыми или сметными. Если фактические затраты превышают планируемые, то могут быть предприняты необходимые действия, направленные на то, чтобы привести фактическую сумму затрат на проект в соответствие с планом.

Применение метода минимизации затрат и метода PERT/COST позволяет получить ответы на следующие вопросы:

1. При каких минимальных затратах можно уменьшить время выполнения проекта до заданной величины?
2. На сколько следует сократить продолжительность времени выполнения каждой работы проекта?
3. Соответствуют ли фактические затраты на выполнение проекта сметным затратам?
4. Соответствуют ли фактические затраты запланированному сроку реализации проекта?

Метод анализа затрат PERT/COST основан на построении области допустимых затрат, при которых проект может быть реализован за определенное время. В результате применения метода CPM или метода PERT могут быть получены наиболее раннее и наиболее позднее время начала каждой работы.

Далее строятся два графика: график совокупных затрат при наиболее раннем времени начала работ и график совокупных затрат при наиболее позднем времени начала работ. Если фактические затраты на выполнение проекта будут находиться внутри области, очерченной этими графиками, то проект может быть выполнен за время, соответствующее длине критического пути. Если фактические затраты окажутся за пределами очерченной области, то продолжительность увеличится.

Перечень работ проекта, время их выполнения и оценки затрат на выполнение работ заданы в следующей таблице:

Таблица 17.

Работа	Ожидаемое время выполнения, нед.	Непосредственно предшествующие работы	Сметные затраты, тыс. руб.	Удельные затраты тыс. руб. в нед.
A	3	-	18	6
B	6	-	30	5
C	2	A	6	3
D	5	B, C	10	2
E	4	D	20	5
F	3	E	12	4
G	9	B, C	18	2
H	3	F, G	9	3

Удельные затраты определены в предположении о том, что затраты производятся равномерно в течение срока выполнения работы.

Требуется определить, в каком диапазоне могут меняться фактические затраты на выполнение проекта при условии, что проект будет выполнен за минимальное время.

Необходимо ответить на следующие вопросы:

1. За какое минимальное время может быть выполнен проект?
2. Про каком максимальном значении совокупных затрат, сделанных за первые три недели реализации проекта, проект может быть выполнен за минимальное время?
3. При каком минимальном значении совокупных затрат, сделанных за первые три недели реализации проекта, проект может быть выполнен за минимальное время?
4. При каком максимальном значении совокупных затрат, сделанных за шестнадцать недель реализации проекта, проект может быть выполнен за минимальное время?

5. При каком минимальном значении совокупных затрат, сделанных за шестнадцать недель реализации проекта, проект может быть выполнен за минимальное время?

Решение поставленной задачи состоит из двух этапов.

На первом этапе – планирования проекта, с помощью метода сетевого планирования выразим наглядно сложные соотношения между отдельными работами, выделим напряженные участки работ и составим оптимальный план – проект, минимизирующий разработку по времени.

На втором этапе – реализации проекта, на основании поступающей информации происходит контроль за выполнением плана, составленного на первом этапе, и внесение в него необходимых коррективов.

Отыскание критического пути

На основании исходных данных нарисуем сетевой граф проекта.

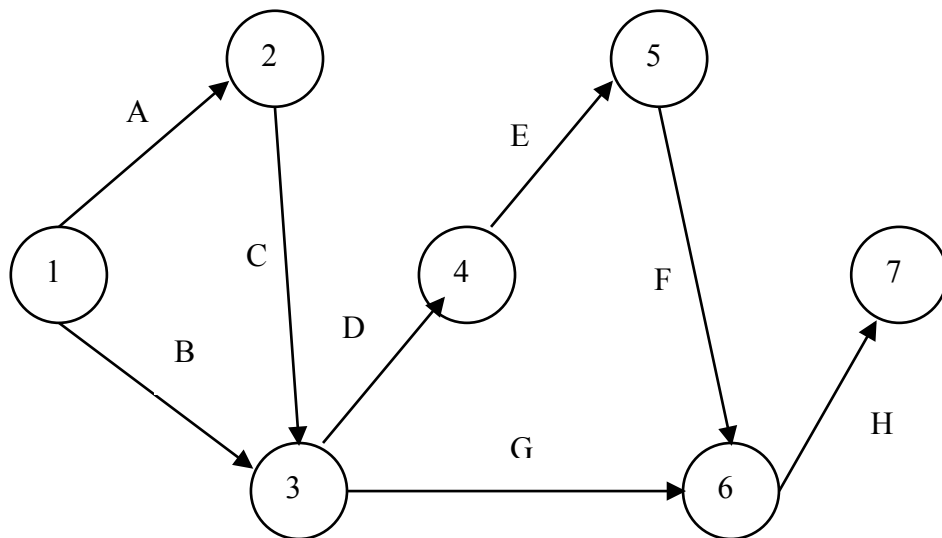


Рис. 6. Сетевой график

Проект представлен в виде графа с вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и дугами A, B, C, D, E, F, G. Каждая вершина графа отображает определенное событие. Событие 1 означает начало выполнения проекта (такое событие также обозначают S). Событие 7 означает завершение проекта. Любая работа проекта – это упорядоченная пара двух событий.

Работа А – упорядоченная пара событий (1,2).

Работа В – упорядоченная пара событий (1,3).

Работа С – упорядоченная пара событий (2,3).

Работа D – упорядоченная пара событий (3,4).

Работа Е – упорядоченная пара событий (4,5).

Работа F – упорядоченная пара событий (5,6).

Работа G – упорядоченная пара событий (3,6).

Работа Н – упорядоченная пара событий (6,7).

Определим минимальное время выполнения проекта. Для того чтобы определить минимальный срок выполнения проекта, достаточно найти длину критического пути.

Применим метод СРМ. Результаты произведенных расчетов представим в следующей таблице.

Таблица 18.

Работа	Время выполнения	Ранний срок начала работы	Ранний срок окончания работы	Поздний срок начала работы	Поздний срок окончания работы	Полный резерв времени работы
А	3	0	3	1	4	1
В	6	0	6	0	6	0
С	2	3	5	4	6	1
D	5	6	11	6	11	0
Е	4	11	15	11	15	0
F	3	15	18	15	18	0
G	9	6	15	9	18	3
Н	3	18	21	18	21	0

Критические работы имеют резерв времени равный нулю. Следовательно, на критическом пути лежат работы В, D, Е, F, Н. Длина критического пути составляет 21 неделю.

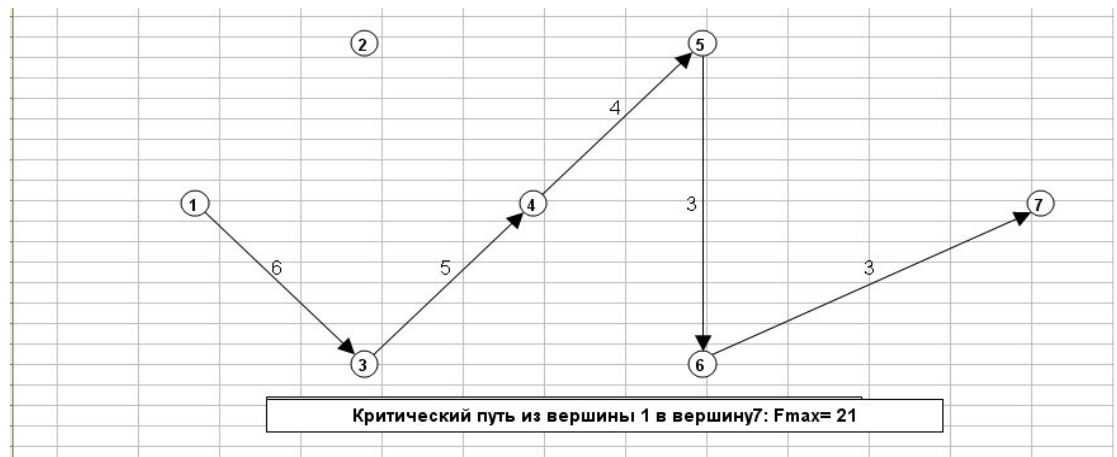


Рис. 7. Изображение критического пути.

Определим динамику совокупных затрат для графика выполнения проекта с наиболее ранним началом работ. Ранний срок начала работы (i, j) определяем по формуле

$$t_{p.n}(i, j) = t_p(i).$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица 19.

Определим динамику совокупных затрат для графика выполнения проекта с наиболее поздним началом всех работ.

Поздний срок начала работы (i, j) определяем по формуле

$$t_{n.n}(i, j) = t_n(j) - t(i, j).$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица 20.

Рис. 8. Динамика совокупных затрат для графика выполнения проекта с наиболее поздним началом всех работ.

На следующем рисунке показано два графика. Выше (Ряд 1) проходит график совокупных затрат при наиболее раннем времени начала работ.

Ниже (Ряд 2) – график совокупных затрат при наиболее позднем времени начала работ.

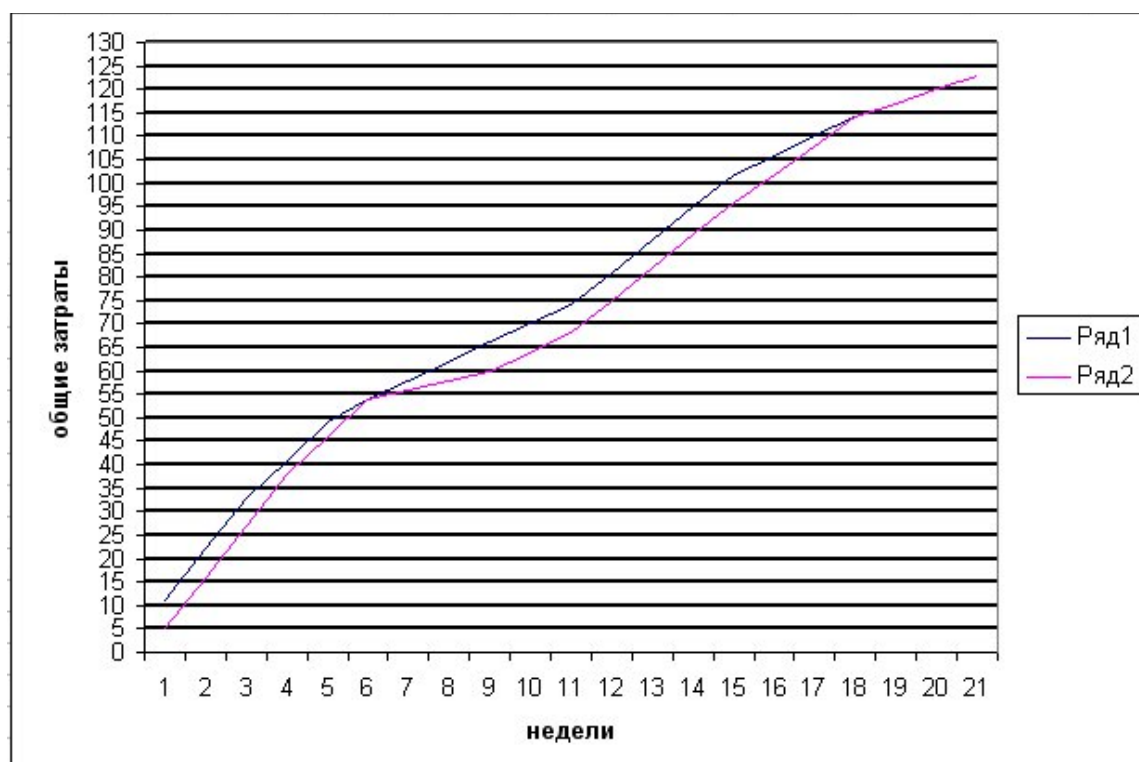


Рис. 9. График общих затрат на выполнение проекта

Если фактические затраты на выполнение проекта будут находиться внутри очерченной области, то проект может быть выполнен за 21 неделю. Если фактические затраты окажутся за пределами очерченной области, то продолжительность проекта увеличится.

Таким образом, менеджер может контролировать фактические затраты по проекту. Если сметные затраты не выполнены или допущен перерасход, необходимо осуществлять корректирующие воздействия, сдвигая время начала выполнения отдельных работ и /или сокращая их продолжительность путем привлечения дополнительных ресурсов.

Теперь можно ответить на вопросы, поставленные ранее.

Минимальное время выполнения проекта составляет 21 неделю.

Максимальное значение совокупных затрат, сделанных за первые три недели реализации проекта, при котором проект может быть выполнен за 21 неделю, равно 33 тыс. руб.

Минимальное значение совокупных затрат, сделанных за первые три недели реализации проекта, при котором проект может быть выполнен за 21 неделю, равно 27 тыс. руб.

Максимальное значение совокупных затрат, сделанных за первые шестнадцать недель реализации проекта, при котором проект может быть выполнен за 21 неделю, равно 106 тыс. руб.

Минимальное значение совокупных затрат, сделанных за первые шестнадцать недель реализации проекта, при котором проект может быть выполнен за 21 неделю, равно 102 тыс. руб.

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ НА СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРОЕКТА

Предположим, что ожидаемое время выполнение проекта нас не устраивает, необходимо его уменьшить. Сокращение времени выполнения проекта, как правило, связано с использованием дополнительных ресурсов, таких, как увеличение количества рабочих или работа в неурочное время. Следовательно сокращение срока выполнения проекта приводит к увеличению затрат на его реализацию. В результате требуется искать компромисс между сокращением времени выполнения той или иной работы и экономией дополнительных затрат, необходимых для сокращения времени реализации проекта, где могут использовать модель линейного программирования.

Для планирования затрат, составление графика расходования средств и осуществления контроля за этим расходованием может быть использован метод анализа затрат PERT/COST. Конечная цель применения метода PERT/COST состоит в том, что затраты на реализуемый проект соответствовали принятой смете. Составление сметы расходов на

реализацию проекта обычно предполагает выявление всех затрат на проект, а затем распределение этих затрат во времени. На этапах выполнения проекта фактические затраты могут быть сравнены с планируемыми или сметными. Если фактические затраты превышают планируемые, то могут быть предприняты необходимые действия, направленные на то, чтобы привести фактическую сумму затрат на проект в соответствии с планом.

Применение метода минимизации затрат и метода PERT/COST позволяет получить ответы на следующие вопросы.

1. При каких минимальных затратах можно уменьшить время выполнения проекта до заданной величины?
2. На сколько можно сократить продолжительность времени выполнения каждой работы проекта?
3. Соответствуют ли фактические затраты на выполнение проекта сметным затратам?
4. Соответствуют ли фактические затраты запланированному сроку реализации проекта?

После того как мы выполним задания, предлагаемые в этом разделе, мы будем уметь определять и использовать для экономического анализа:

- ~ затраты на выполнение работы в условиях нормального ее выполнения;
- ~ затраты на выполнение работы в условиях максимального сокращения ее продолжительности;
- ~ нормальную продолжительность работы;
- ~ продолжительность работы при максимально возможном ее сокращении;
- ~ сокращение времени выполнения работы;
- ~ сокращение времени выполнения проекта;
- ~ затраты на сокращение времени выполнения проекта.

МОДЕЛЬ МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА

Пусть:

(i, j) – работа проекта,

t_{ij} – нормальная продолжительность работы (i, j) ;

t'_{ij} – продолжительность работы (i, j) при максимально возможном ее сокращении;

M – величина максимально возможного сокращения продолжительности работы (i, j) за счет дополнительных ресурсов; $M = t_{ij} - t'_{ij}$;

C_{ij} – расчетные затраты на выполнение работы (i, j) в условиях нормального или ожидаемого времени;

C'_{ij} – расчетные затраты на выполнение работы (i, j) в условиях максимального сокращения ее продолжительности за счет дополнительных ресурсов;

K_{ij} – удельные затраты на сокращение продолжительности работы (i, j) (на единицу времени);

$$K = \frac{C'_{ij} - C_{ij}}{M_{ij}};$$

Введем предположение о пропорциональности: любая дополнительная доля сокращаемого времени на выполнение работы потребует постоянной (неизменной во времени) доли дополнительных затрат. При таком предположении для решения проблемы минимизации затрат на сокращение времени реализации проекта можно использовать модель линейного программирования.

Для формулировки модели дополнительно введем следующие обозначения:

x_i – время наступления события i (событие – узел отражает факт завершения всех работ, входящих в данный узел);

y_{ij} – величина сокращения времени работы (i, j) ;

T_0 – желательное время выполнения проекта;

$i = 1$ – номер начального события для сети, описывающей проект;

$i = n$ – номер конечного события для сети, описывающей проект.

При данных обозначениях модель линейного программирования имеет вид:

$$\sum_{ij} K_{ij} y_{ij} \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$x_i - x_j + t_{ij} - y_{ij} = 0; \quad (2)$$

$$y_{ij} \leq M_{ij}; \quad (3)$$

$$x_n \leq T_0; \quad (4)$$

$$x_i \geq 0; \quad y_{ij} \geq 0; \quad (5)$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

если m – число работ, n – число событий, то описанная модель имеет $n+m$ переменных, m ограничений вида (2), m ограничений вида (3), $n+m$ ограничений вида (5) и одно ограничение вида (4). Итого $n+m$ переменных и $3m+n+1$ ограничения.

Если $\{x_j^*, y_{ij}^*\}$ – оптимальный план для модели (1) – (5), то y_{ij}^* – время, на которое следует сократить продолжительность выполнения работы (i, j) ;
 $\sum_{ij} K_{ij} y_{ij}^*$ – минимальная сумма издержек, необходимая для сокращения выполнения проекта до T_0 .

МЕТОД АНАЛИЗА ЗАТРАТ PERT/COST

Метод основан на построении области допустимых затрат, при которых проект может быть реализован за определенное время. В результате применения метода СРМ или метода PERT можно рассчитать наиболее раннее и наиболее позднее время начала каждой работы. Далее строятся два

графика: график совокупных затрат при наиболее раннем времени начала работ и график совокупных затрат при наиболее позднем времени начала работ. Если фактические затраты на выполнение проекта будут находиться внутри области, очерченной этими графиками, то проект может быть выполнен за время, соответствующее длине критического пути. Если фактические затраты окажутся за пределами очерченной области, то продолжительность увеличится.

Пример. Проект пуско-наладки компьютерной системы состоит из восьми работ. В таблице указана взаимосвязь работ, нормальное их выполнение и данные, характеризующие возможность сокращения продолжительности работ.

Таблица 21. Табличный способ описания проекта

Работы	Непосредственно предшествующие работы	Нормальное время, неделя	Минимальное время	Затраты при нормальном времени, руб.	Затраты при минимальном времени, руб.
1	2	3	4	5	6
A	-	3	1	900	1700
B	-	6	2	2000	4000
C	A	2	1	500	1000
D	B, C	5	3	1800	2400
E	D	4	3	1500	1850
F	E	3	1	3000	3900
G	B, C	9	4	8000	9800
H	F, G	3	2	1000	2000

Определить минимальную продолжительность проекта при нормальном времени выполнения работ. Можно ли уменьшить продолжительность проекта при дополнительных затратах.

Существует ряд вопросов, на которые необходимо ответить:

1. Какова продолжительность проекта при нормальном времени выполнения работ?
2. Сколько работ в этом случае является критическими?
3. Каковы затраты на выполнение проекта при нормальном времени выполнения работ?
4. С какими минимальными дополнительными затратами можно выполнить этот проект за 16 недель?

Для решения задачи, прежде всего необходимо найти критический путь при нормальном времени выполнения работ. Исходные данные представлены в таблицы (табл. 22), описывающие проект в виде последовательности работ.

Таблица 22.

Работа	Предшествующие работы	Время выполнения
A	-	3
B	-	6
C	A	2
D	B, C	5
E	D	4
F	E	E
G	B, C	9
H	F, G	3

На основании исходных данных нарисуем сетевой граф проекта.

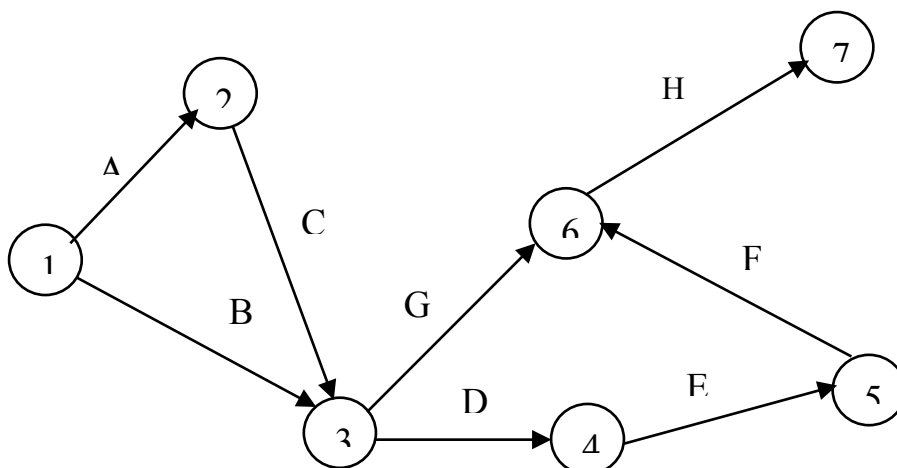


Рис. 10. Сетевой график

При выполнении расчета, получаем следующие результаты.

Таблица 23.

Работа	Время выполнения	ES	EF	LS	LF	R
A	3	0	3	1	4	1
B	6	0	6	0	6	0
C	2	3	5	4	6	1
D	5	6	11	6	11	0
E	4	11	15	11	15	0
F	3	15	18	15	18	0
G	9	6	15	9	18	3
H	3	18	21	18	21	0

При нормальной продолжительности работ длина критического пути составляет 21 неделю. На критическом пути находятся работы B, D, E, F, H.

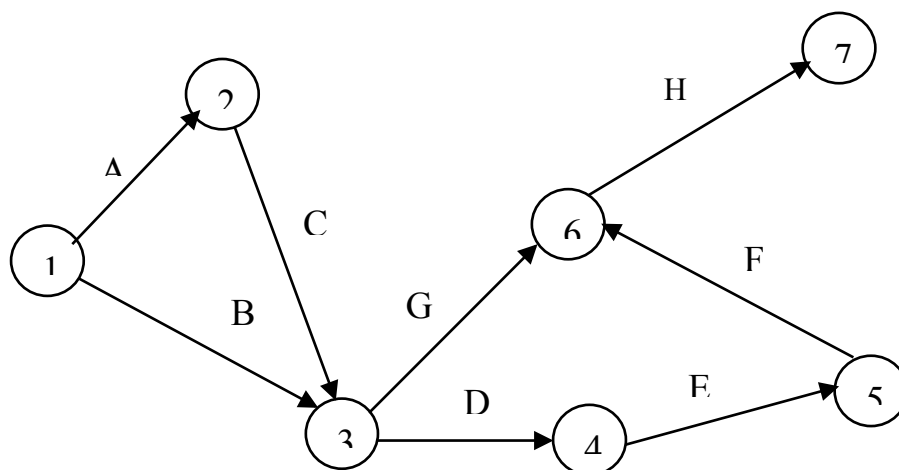


Рис. 11. Изображение критического пути.

Для определения затрат на выполнение проекта при нормальном времени выполнения работ, достаточно просуммировать затраты при нормальном времени, в результате чего получаем 18 700 руб.

Для определения минимальных дополнительных издержек, необходимых для снижения продолжительности проекта до 16 недель, строится модель линейного программирования.

Теперь можно определить удельные затраты K_{ij} на сокращение продолжительности работ, получаем следующие результаты (табл. 24).

Таблица 24.

Работа	Нормальное время, неделя	Минимальное время	Затраты при нормальном времени, руб.	Затраты при минимальном времени, руб.	Удельные затраты, руб./недели
A	3	1	900	1700	400
B	6	2	2000	4000	500
C	2	1	500	1000	500
D	5	3	1800	2400	300
E	4	3	1500	1850	350
F	3	1	3000	3900	450
G	9	4	8000	9800	360
H	3	2	1000	2000	1000

Обозначим: x_i – время наступления события i ; y_{ij} – величина сокращения времени работы (i,j) . Тогда модель линейного программирования для определения минимальных издержек, необходимых для сокращения продолжительности проекта с 21 недель до 16 недель, имеет вид:

$$400 y_{12} + 500 y_{13} + 500 y_{23} + 300 y_{34} + 350 y_{45} + 450 y_{56} + 360 y_{36} + 1000 y_{67} \rightarrow \min;$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq x_1 + 3 - y_{12}, & x_3 &\leq x_1 + 6 - y_{13}, & x_3 &\leq x_2 + 2 - y_{23}, \\ x_4 &\leq x_3 + 5 - y_{34}, & x_5 &\leq x_4 + 4 - y_{45}, & x_6 &\leq x_5 + 3 - y_{56}, \\ x_6 &\leq x_3 + 9 - y_{36}, & x_7 &\leq x_6 + 3 - y_{67}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{12} &\leq 2, & y_{13} &\leq 4, & y_{23} &\leq 1, \\ y_{34} &\leq 2, & y_{45} &\leq 1, & y_{36} &\leq 2, \\ y_{67} &\leq 5, & y_{56} &\leq 1; \end{aligned}$$

$$x_7 \leq 16;$$

$$x_i \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0, \\ i, j = 1, K, n, \quad i \neq j.$$

Для решения этой задачи линейного программирования используем Поиск решения.

Выполнив расчеты, получаем следующие результаты. Минимальные затраты, необходимые для сокращения продолжительности проекта с 21 недель до 16 недель, составляют 2260 руб. Продолжительность каждой из работ (1,3), (4,5), (5,6) и (3,6) сокращается на одну неделю. Продолжительность работы (3,4) сокращается на 2 недели.